# 第 1 講　いろいろな関数

# PART1 分数関数

## 要点整理と公式

### 要点 ① 分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

「分数関数」･･･ $y=\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{x^2+1}{x-3}$ のように，分数式で表される関数。

定義域は，分母を 0 にする $x$ の値を除く実数全体。

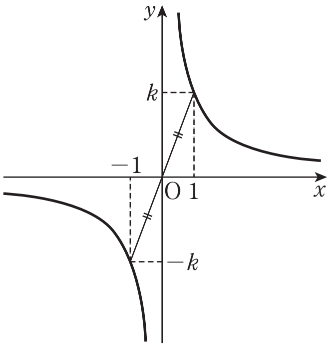
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ ( $k \neq 0$ ) のグラフについて

・グラフは，原点について対称な「　　　　」

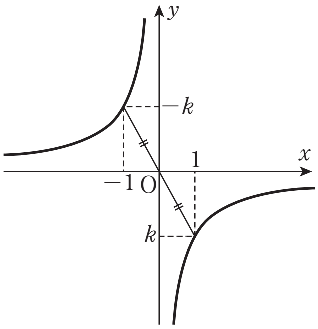
・$x$ 軸と $y$ 軸を「　　　　」とする

・定義域：$x \neq 0$　　　値域：$y \neq 0$

$k>0$ のとき



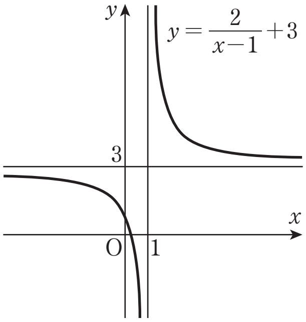

$k<0$ のとき




一般に，関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したものである。

(ex) 関数 $y=\dfrac{2}{x-1}+3$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に　，$y$ 軸方向に　だけ平行移動した双曲線であり，漸近線は 2 直線 $x=$　，$y=$　である。

定義域は $x \neq$　　　値域は $y \neq$　である。



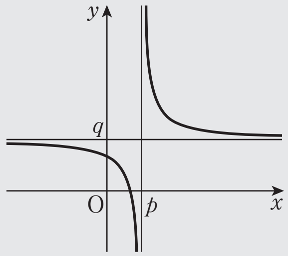
## 分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ

・グラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した直角双曲線

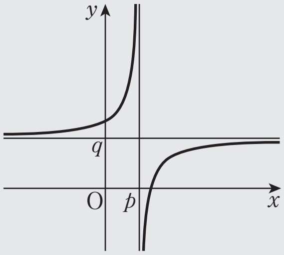
・漸近線は $x=p$，$y=q$

・定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$

$k>0$ のとき




$k<0$ のとき




## 要点 ② 分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形することができる。

(ex) 分数関数 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ のグラフ

$2x+1$ を $x+1$ で割ると，商は 2 で余りは $-1$ であるから

$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{\quad(x+1)\quad}{x+1}=\frac{(x+1)}{x+1}+\frac{\quad}{x+1}$$

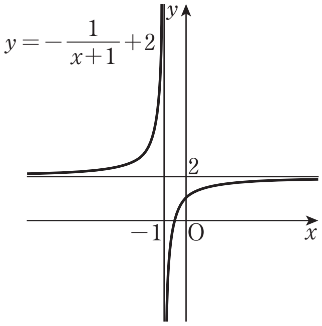
$$=\frac{\quad}{x+1}$$

$$=\frac{\quad}{x+1}+$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+1\,\overline{)\,2x+1} \\ \underline{2x+2} \\ -1 \end{array}$$

よってこの関数のグラフは，$y=$　　　のグラフを $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。したがって，グラフは右図。

漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=2$



**1** (1) 次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

(i) $y=\dfrac{1}{x-1}$　　(ii) $y=-\dfrac{4}{x}+3$

(iii) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$　　(iv) $y=\dfrac{3-2x}{x-2}$

(2)(i) 関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(ii) 不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ を解け。

# Point Pickup

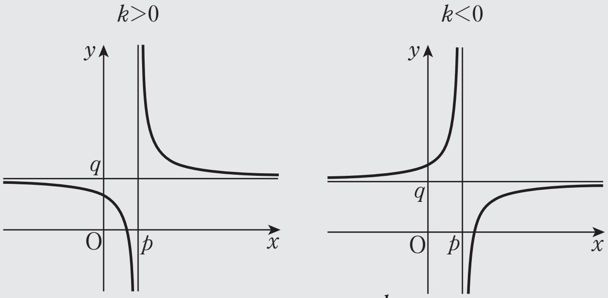
**分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフ**

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを

$x$ 軸方向に

$y$ 軸方向に

だけ平行移動した直角双曲線




漸近線 $x=p$，$y=q$ をかき，点 $(p,\ q)$ を原点に見立てて $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを描く。

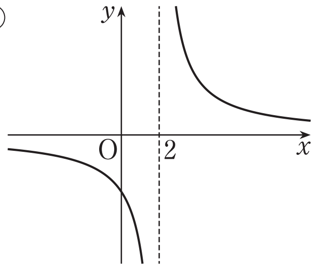
**分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ**

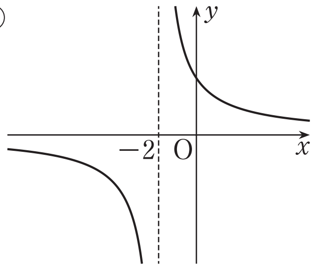
「除法の原理」を用いて，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形し，グラフを描く。

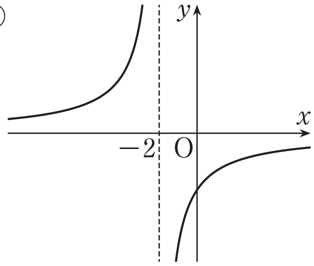
# 第 1 講　PART1 確認問題

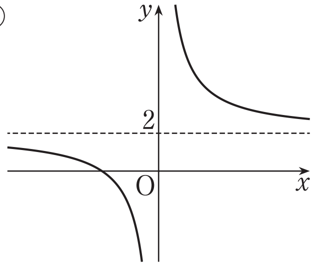
**1**　関数 $y=\dfrac{6}{x+2}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

ア

①


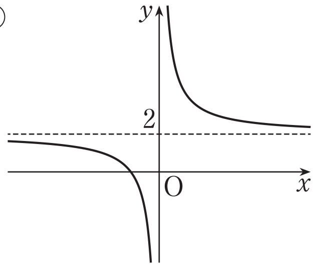

②


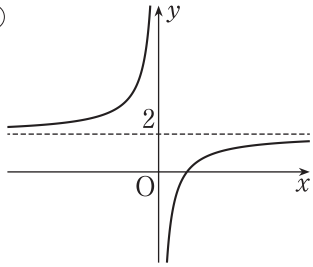

③


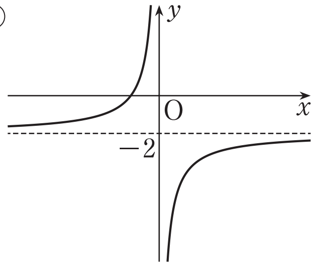

④


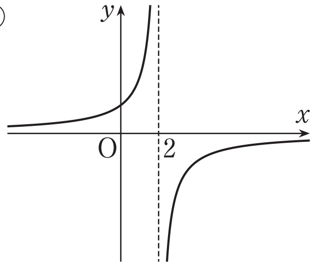

**2**　関数 $y=-\dfrac{3}{x}+2$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

イ

①


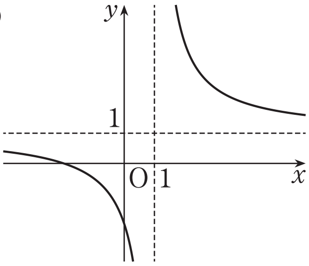

②


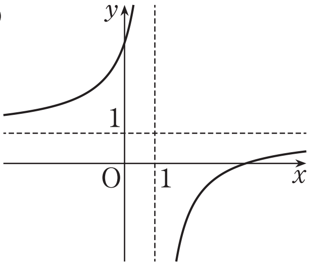

③


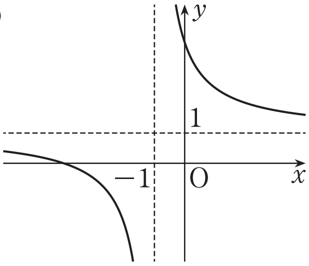

④


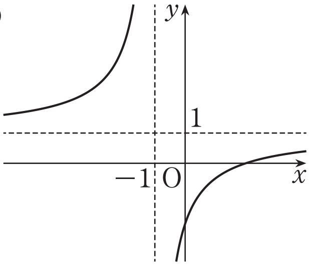
**3** 関数 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

ウ

①


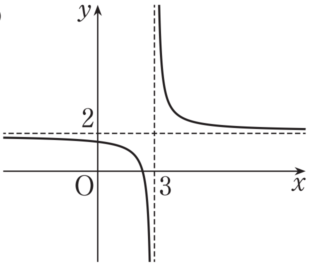

②


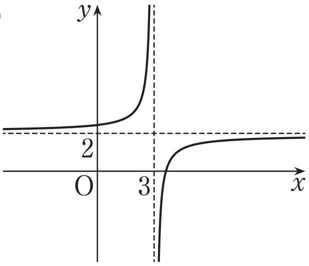

③


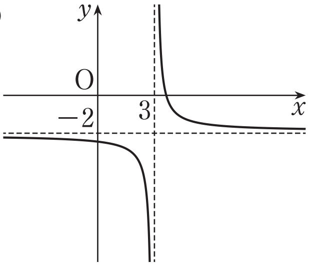

④


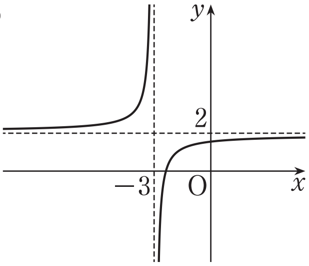

**4** 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ のグラフを，次の①～④のうちから選べ。

エ

①



②



③



④


**5** 関数 $y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフと直線 $y=x+3$ の共有点の $x$ 座標は，[オ]，[カキ] である。

**6** 不等式 $\dfrac{3x+5}{x+1}>x+3$ の解は，

$x<$ [クケ]，$-1<x<$ [コ] である。

# PART2 無理関数

## 要点整理と公式

### 要点① 無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

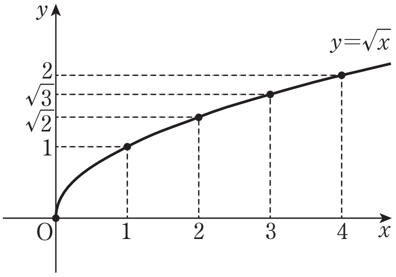
「無理式」･･･ $\sqrt{x}$，$\sqrt{x^2+2}$ のように，根号の中に文字を含む式。

$x$ の無理式で表される関数を $x$ の「無理関数」という。

定義域は，根号の中が 0 以上になる実数全体。

無理関数 $y=\sqrt{x}$ ……① の定義域は

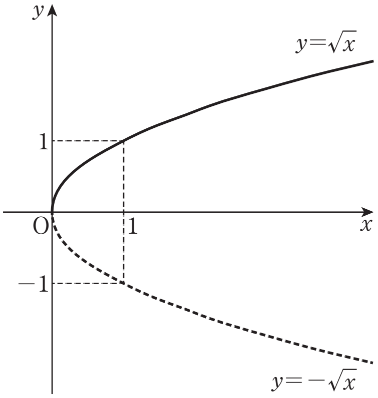
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | …… |




①のグラフは右図。値域は

①の両辺を 2 乗すると $y^2=x$ ……②

これは原点を頂点とし，$x$ 軸を軸とする放物線を表す。①のグラフは，放物線②の $y\geqq 0$ の部分，すなわち $x$ 軸より上側の部分および原点である。




無理関数 $y=-\sqrt{x}$ ……③ のグラフは，①のグラフと $x$ 軸に関して対称なグラフであるから，放物線②の $y\leqq 0$，すなわち $x$ 軸より下側の部分および原点である。

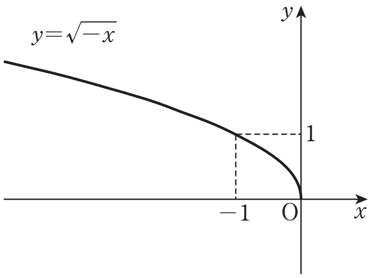
③の定義域は $x\geqq 0$，値域は　　　である。

無理関数 $y=\sqrt{-x}$ ……④ の定義域は　　　，値域は　　　である。

④のグラフは，①のグラフと $y$ 軸に関して対称なグラフである。

④の両辺を2乗すると $y^2=-x$ ……⑤ であり，

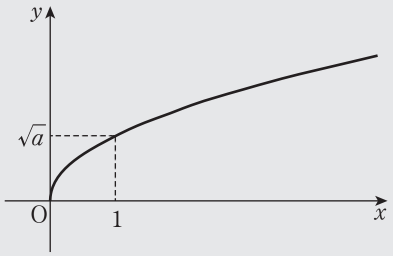
④のグラフは，放物線⑤の $y\geqq 0$ の部分，すなわち $x$ 軸より上側の部分および原点である。



### 無理関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフ

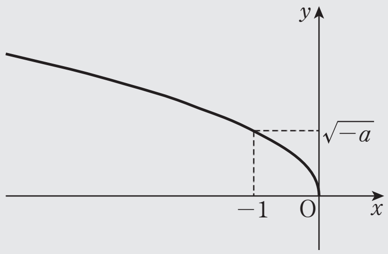
頂点を原点，軸を $x$ 軸とする放物線 $y^2=ax$ の $y\geqq 0$ の部分

$a>0$ のとき




定義域：$x\geqq 0$　　値域：$y\geqq 0$

$a<0$ のとき




定義域：$x\leqq 0$　　値域：$y\geqq 0$

## 要点 ② 無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

(ex) 無理関数 $y=\sqrt{2x-4}$ のグラフ

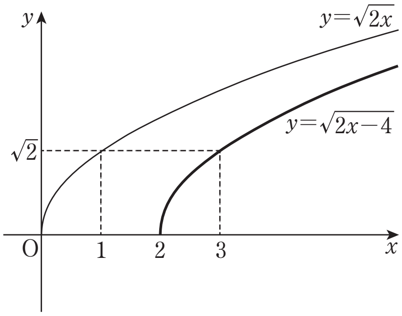
$y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x\quad\quad)}$

よってこの関数のグラフは，$y=$　　　　のグラフを

$x$ 軸方向に　だけ平行移動

したものである。したがって，グラフは右図。

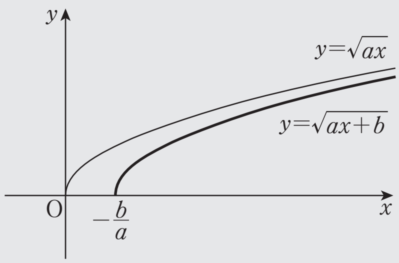
定義域は　　　　，値域は $y\geqq 0$ である。




### 無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

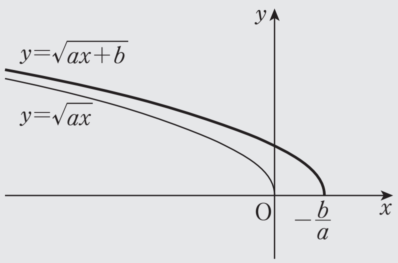
$y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ より，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動した曲線

$a>0$ のとき




定義域：$x\geqq -\dfrac{b}{a}$　　値域：$y\geqq 0$

$a<0$ のとき




定義域：$x\leqq -\dfrac{b}{a}$　　値域：$y\geqq 0$

**2**　(1)　次の関数のグラフをかけ。

(i)　$y=\sqrt{2x}$　　(ii)　$y=-\sqrt{2x}$

(iii)　$y=\sqrt{-2x}$　　(iv)　$y=-\sqrt{-2x}$

(2)(i)　関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

(ii)　不等式 $\sqrt{2x+3}>x$ を解け。

# Point Pickup

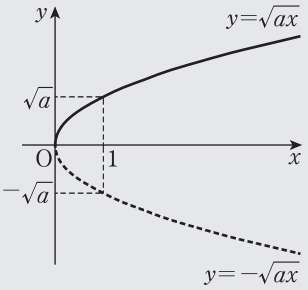
**無理関数 $y=\pm\sqrt{ax}$ のグラフ**

頂点を原点，軸を $x$ 軸とする放物線 $y^2=ax$ の

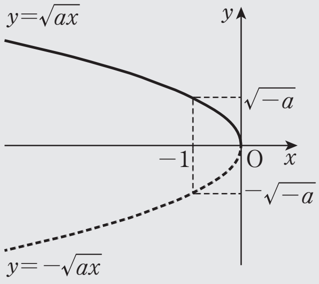
$y=\sqrt{ax}$　……　$y\geqq 0$ の部分

$y=-\sqrt{ax}$　……　$y\leqq 0$ の部分

$a>0$ のとき




$a<0$ のとき




**分数関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ**

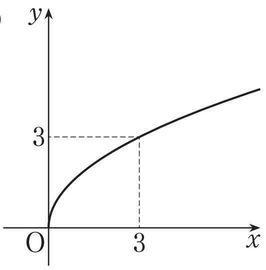
$y=\sqrt{a(x-p)}$ の形に変形し，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$ だけ平行移動したグラフを描く。

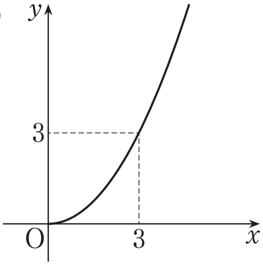
# 第 1 講　PART2 確認問題

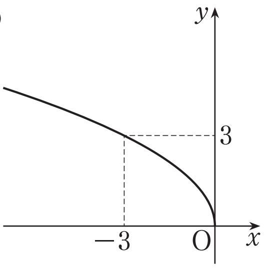
**1**　次の関数のグラフを，下の①～⑥のうちから選べ。

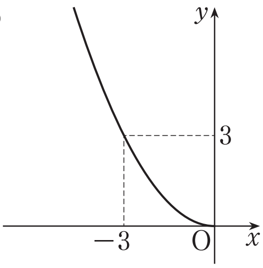
$y=\sqrt{3x}$　$\boxed{\text{ア}}$　　$y=-\sqrt{3x}$　$\boxed{\text{イ}}$

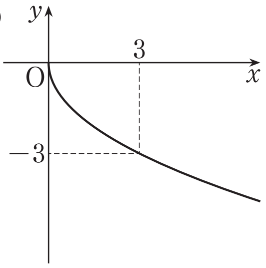
$y=\sqrt{-3x}$　$\boxed{\text{ウ}}$　　$y=-\sqrt{-3x}$　$\boxed{\text{エ}}$

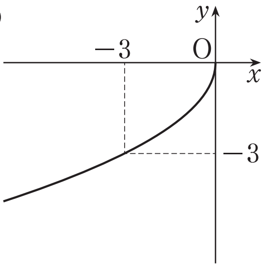
①



②



③



④



⑤



⑥



**2**　関数 $y=\sqrt{x+4}$ のグラフと直線 $y=x-2$ の共有点の座標は，$\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ である。

**3**　不等式 $\sqrt{x+4}>x-2$ の解は，$\boxed{\text{キク}}\leqq x<\boxed{\text{ケ}}$ である。

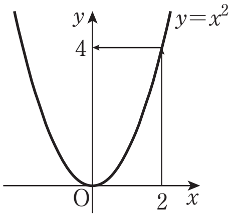
# PART3 逆関数

## 要点整理と公式

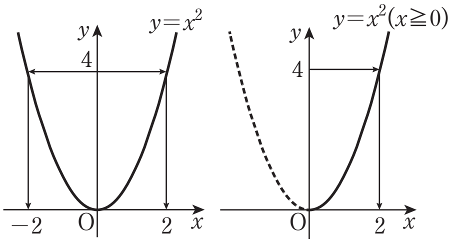
### 要点 ① 逆関数

$x$ の値が 1 つ決まると，それに対応して $y$ の値がただ 1 つ決まるとき，$y$ は $x$ の「関数」であるといい，この関数を $y=f(x)$ と表すことができる。

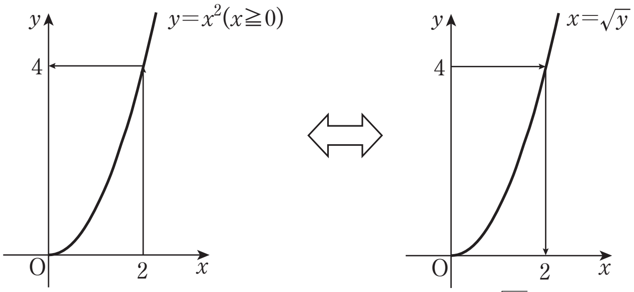
たとえば，$y=x^2$ について，$y$ は $x$ の関数であり，$f(x)=x^2$ として $y=f(x)$ と表すことができる。
$y=x^2$ の定義域は実数全体，値域は $y \geqq 0$ である。




この $y=x^2$ において，値域内の $y$ の値が 1 つ決まっても，$x$ の値はただ 1 つに定まらない。よって，$x$ は $y$ の関数とはいえない。
ここで，$y=x^2$ の定義域を $x \geqq 0$ とすると値域$(y \geqq 0)$内の $y$ の値 1 つに対応して，$x$ の値がただ 1 つに定まる。




一般に，関数 $y=f(x)$ において，値域内の $y$ の値が 1 つ決まると，それに対応して $x$ の値がただ 1 つ決まるとき，$x$ は $y$ の関数であるという。このとき，この関数を $x=g(y)$ と表すことができる。
たとえば，$y=x^2$ を $x$ について解くと $x=\pm\sqrt{y}$
ここで，定義域を $x \geqq 0$ と定めると $x=\sqrt{y}$ となる。
よって，$g(y)=\sqrt{y}$ として，$x=g(y)$ と表すことができる。

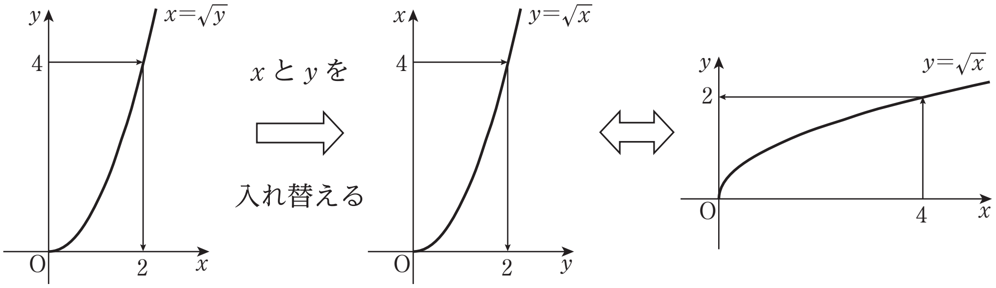



$f(x)=x^2$　　　　$g(y)=\sqrt{y}$

このとき, 変数 $y$ を $x$ に書き直した関数 $g(x)$ を, もとの関数 $f(x)$ の「　　　　」といい,

$f$ 　$(x)$ ($f$ 　　　　　　$x$)と表す。

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れ替わる。つまり，逆関数の定義域は，もとの関数の値域である。




$g(y)=\sqrt{y}$
値域

$g(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
定義域

## 逆関数

関数 $y=f(x)$ において，$y$ の値を 1 つ決めるとそれに対応して $x$ の値がただ 1 つ決まるとき，すなわち $x=g(y)$ と表されるとき，$x$ と $y$ を入れ替えて得られる関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の逆関数といい，$y=f^{-1}(x)$ と表す。

＜逆関数の性質＞

・$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$

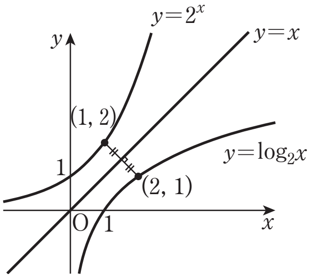
・$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では，定義域と値域が入れ替わる

(ex) 指数関数 $y=2^x$ の逆関数

$y=2^x$より $x=$

$x$ と $y$ を入れ替えると，$y=$

これが $y=2^x$ の逆関数である。




$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$ が成り立つことにより，点 $(a,\ b)$ が関数 $y=f(x)$ のグラフ上にあることと点 $(b,\ a)$ が関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上にあることは同値である。点 $(a,\ b)$ と点 $(b,\ a)$ は，直線　　　　に関して対称であるから，次のことが成り立つ。

## 逆関数のグラフの性質

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは

直線 $y=x$ に関して対称である。

**3** (1) 次の関数の逆関数を求めよ。また，それぞれの関数のグラフとその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(i) $y=3x-6\ (1\leqq x\leqq 2)$　　(ii) $y=\sqrt{2-x}$

(iii) $y=4^x$　　(iv) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

(2) 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ の逆関数を求めよ。

# Point Pickup

**逆関数の求め方**

$y=f(x)$ の逆関数の求め方は以下

① $y=f(x)$ を $x$ について解き，$x=g(y)$ の形にする。

② $x=g(y)$ の $x$ と $y$ を入れ替えて，$y=g(x)$ とする。

この $g(x)$ が，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ である。

$f^{-1}(x)$ の定義域は，$f(x)$ の値域である。また $f^{-1}(x)$ の値域は，$f(x)$ の定義域である。

**逆関数の性質**

関数 $f(x)$ が，逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

・$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$

・$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

# 第 1 講　PART3 確認問題

次の関数の逆関数を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

また，定義域を示してあるものは，当てはまる数を記入せよ。

**1**　$y=-2x+8 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

逆関数　$y=$ ア　（ イ $\leqq x \leqq$ ウ ）

①　$2x-8$　　②　$-2x+4$

③　$\frac{1}{2}x+4$　　④　$-\frac{1}{2}x+4$

**2**　$y=\sqrt{x-3}$

逆関数　$y=$ エ　（$x \geqq$ オ ）

①　$x^2$　　②　$x^2+3$

③　$x^2-3$　　④　$\sqrt{-x+3}$

**3**　$y=3^x$

逆関数　$y=$ カ

①　$x^3$　　②　$\left(\frac{1}{3}\right)^x$

③　$\log_3 x$　　④　$\log_{\frac{1}{3}} x$

**4**　$y=\log_2 x$

逆関数　$y=$ キ

①　$2^x$　　②　$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

③　$x^2$　　④　$-\log_2 x$

**5** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

逆関数　$y=$ ク

① $\dfrac{2x+1}{x-1}$　　② $-\dfrac{x}{x-2}$

③ $\dfrac{x+1}{x-2}$　　④ $-\dfrac{x+1}{x-2}$

## [MEMO]

# PART4 合成関数

## 要点整理と公式

### 要点 ① 合成関数

$y$ が $x$ の関数であり，$z$ が $y$ の関数であるとき，すなわち，2 つの関数

$y=f(x)$，$z=g(y)$

があるとき，$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれていれば，$z$ は $x$ の関数となる。
このことを確認する。

たとえば，$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x+1$ のとき，$y=f(x)$，$z=g(y)$ とすると，
$f(x)$ の値域は $y \geqq -2$，$g(y)$ の定義域は実数全体である。

$x=a$ のとき

$y=f(a)=a^2-2$ より

$z=g(y)=g(a^2-2)=(a^2-2)+1=a^2-1$

となり，$x=a$ のとき $z=a^2-1$ である。

ある $x$ の値に対して

$y=f(x)=x^2-2$ より

$z=g(y)=g(\qquad)=g(x^2-2)=(x^2-2)+1=x^2-1$

となり，$z=x^2-1$ である。
この式において，$x=a$ のとき $z=a^2-1$ である。

このように，$g(y)$ に $y=f(x)$ を代入して得られる関数

$z=g(f(x))$

を $f(x)$ と $g(y)$ の「　　　　　」といい，　　$(x)$ と表す。

(ex) $f(x)=x+2$，$g(x)=-2x+5$ のとき

$(g\circ f)(x)=\ \ (\ \ (x))=-2(x+2)+5=-2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(-2x+5)+2=-2x+7$

一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ の結果は一致しない。

**[MEMO]**

**4** 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$

(3) $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$

## Point Pickup

**合成関数**

$(g\circ f)(x)=\ (\ (x))$

$y=f(x)$ の値域が $z=g(y)$ の定義域に含まれているかを確認

一般に，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ の結果は一致しない。

# 第 1 講　PART4 確認問題

**1**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

$f(x)=3x+1$，$g(x)=x^2-2$

$(g\circ f)(x)=$ ア $x^2+$ イ $x-$ ウ

$(f\circ g)(x)=$ エ $x^2-$ オ

**2**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$f(x)=\log_5 x$，$g(x)=5^x$

$(g\circ f)(x)=$ カ

$(f\circ g)(x)=$ キ

①　$1$　　②　$x$

③　$5^x$　　④　$\log_5 x$

**3**　次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$f(x)=x^2$，$g(x)=\cos x$

$(g\circ f)(x)=$ ク

$(f\circ g)(x)=$ ケ

①　$\sin x^2$　　②　$\cos x^2$

③　$\sin^2 x$　　④　$\cos^2 x$

# 第 2 講　数列の極限

# PART1 数列の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① 数列と極限

項が有限である数列を有限数列，項が限りなく続く数列を無限数列という。

以下では，無限数列について考える。

$\{a_n\}$：$a_1$，$a_2$，$a_3$，……，$a_n$，……

$a_n=\dfrac{1}{n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，$n$ を限りなく大きくすると，第 $n$ 項は限りなく 0 に近づく。

$\{a_n\}$：1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，……，$\dfrac{1}{n}$，……

数列 $\{a_n\}$ において，$n$ を限りなく大きくするとき，$a_n$ が一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は $\alpha$ に「　　　」するといい，値 $\alpha$ を $\{a_n\}$ の「　　　」という。このことを，次のように表す。

$a_n=\alpha$　　または　　　　のとき $a_n$

※記号 $\infty$ は「　　　」と読む。$\infty$ はある値を表すものではない。

### 要点 ② 発散

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は「　　」するという。$a_n=n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，$n$ を限りなく大きくすると，第 $n$ 項は限りなく大きくなる。

$\{a_n\}$：1，4，9，……，$n^2$，……

数列 $\{a_n\}$ において，$n$ を限りなく大きくするとき，$a_n$ が限りなく大きくなるならば，$\{a_n\}$ は「　　　　に発散」する，または $\{a_n\}$ の「極限は　　　　」であるという。このことを，次のように表す。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=$　　　　または　　$n\to\infty$ のとき $a_n\to$

$a_n=-3n+5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，$n$ を限りなく大きくすると，第 $n$ 項は第 2 項より負の数となり，そこから先の項は負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる。

$\{a_n\}$：2，$-1$，$-4$，……，$-3n+5$，……

数列 $\{a_n\}$ において，$n$ を限りなく大きくするとき，$a_n$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$\{a_n\}$ は「　　　　　　に発散」する，または $\{a_n\}$ の「極限は　　　　　」であるという。このことを，次のように表す。

$\lim_{n\to\infty} a_n =$ 　　　　　または　　$n\to\infty$ のとき $a_n\to$

※数列の極限が正の無限大，または負の無限大のとき，これらは極限値とはいわない。

$a_n=(-1)^{n-1}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，$n$ を限りなく大きくしても，項が一定の値に近づかず，また正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

$\{a_n\}$：1，$-1$，1，……，$(-1)^{n-1}$，……

数列 $\{a_n\}$ が収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない場合，その数列は「　　　」するという。振動する数列 $\{a_n\}$ については，極限は存在しない。

**数列の極限**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 「収束」 | $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ | （値 $\alpha$ に収束） | 極限値は $\alpha$ |
| 「発散」 | $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ | （正の無限大に発散） | 極限は $\infty$ |
| | $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ | （負の無限大に発散） | 極限は $-\infty$ |
| | 振動 | | 極限は ない |

## 要点③ 数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとき，次の性質が成り立つ。

**数列の極限の性質**

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$ （ただし，$k$ は定数）

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ 　　$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$ 　　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ （ただし，$\beta\neq 0$）

(ex) $\lim_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)=4\lim_{n\to\infty} a_n-5\lim_{n\to\infty} b_n=4\cdot 2-5\cdot(-3)=23$$

**1**　(1)　第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\dfrac{5}{n^2}$　(ii) $-\dfrac{2}{n}$　(iii) $3n$

(iv) $-\sqrt{n}$　(v) $2^n$　(vi) $(-3)^{n-1}$

(2)　次の極限値を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$

# Point Pickup

**数列の極限**

収束　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　(値 $\alpha$ に収束)

発散
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$　(正の無限大に発散)
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$　(負の無限大に発散)
- 振動

とくに $k>0$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^k=$　(ex)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=$　(ex)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=$

**数列の極限の性質**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$　(ただし，$k$ は定数)

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$　(ただし，$\beta\neq0$)

# 第 2 講 PART1 確認問題

第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

答えは下の①～⑤のうちから選べ。

**1** $2n+1$ ア

① 0 に収束 ② 1 に収束
③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散
⑤ 振動

**2** $-\dfrac{1}{n^2}$ イ

① 0 に収束 ② 1 に収束
③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散
⑤ 振動

**3** $-\sqrt{n+1}$ ウ

① 0 に収束 ② 1 に収束
③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散
⑤ 振動

**4** $(-2)^n$ エ

① 0 に収束 ② 1 に収束
③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散
⑤ 振動

**5** $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ オ

① 0 に収束 ② 1 に収束
③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散
⑤ 振動

次の極限値を求めよ。

**6** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=$ カ

**7** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=$ キ

**8** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=$ ク

# [MEMO]

# PART2 不定形の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① 不定形の極限

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=$　　（形式的に（定数）$+\infty$ となる形）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$　　（形式的に（定数）$-\infty$ となる形）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=$　　（形式的に $\dfrac{(定数)}{\infty}$ となる形）

であり

$\alpha>0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n=$　　（形式的に（正の定数）$\times\infty$ となる形）

$\alpha<0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n=$　　（形式的に（負の定数）$\times\infty$ となる形）

が成り立つが

$\alpha=0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　　（形式的に　　　となる形）

は，収束する場合も発散する場合もある。

また，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=$　　（形式的に $\infty+\infty$ となる形）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n=$　　（形式的に $\infty\times\infty$ となる形）

が成り立つが，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$　　（形式的に　　　となる形）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$　　（形式的に　　となる形）

は，収束する場合も発散する場合もある。

形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ となる極限を，「　　　　」の極限という。不定形の極限を求めるためには，適切な式変形が必要となる。

(ex)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\qquad}{\qquad}=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^2-n)=\lim_{n\to\infty}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=\quad$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^2-n)=$

**2** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}$　　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}$

## Point Pickup

**不定形の極限**

形式的に $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ (不定形)となる極限

→ 式変形により極限が求められる形にする。

・$n$ の整式　→ もっとも次数が高い項 $n^k$ で「　　　　」

・$n$ の分数式 → 分母におけるもっとも次数が高い項 $n^k$ で「分母・分子を　　　」

# 第 2 講 PART2 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

**1** $\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=$ ［ア］

① 0　② 1　③ $-1$
④ 2　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**2** $\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=$ ［イ］

① 0　② 1　③ $-1$
④ 2　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**3** $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3n}=$ ［ウ］

① 0　② 1　③ $-1$
④ 2　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**4** $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=$ ［エ］

① 0　② 1　③ $-1$
④ 2　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**5** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+1}=$ ［オ］

① 0　② 1　③ $-1$
④ 2　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

# PART3 無理式の極限

## 要点整理と公式

### 要点① 無理式の極限

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ について考える。

この極限は，形式的に $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形(不定形)である。

$n$ を限りなく大きくするとき，$\sqrt{n^2+1}$ は実質的に $\sqrt{n^2}=n$，すなわち 1 次式とみなすことができる。よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}$ と同様に，分母と分子を $\square$ $(>0)$ で割ることにより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\times\frac{1}{\square}}{(2n-1)\times\frac{1}{\square}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)\times\frac{1}{\square}}}{(2n-1)\times\frac{1}{\square}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\square}}{\square}=\square=\frac{1}{2}$$

といったように，式変形により極限を求めることができる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ について考える。

この極限は，形式的に $\infty-\infty$ の形(不定形)である。

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\square}{\square}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\square$$

といったように，式変形により極限を求めることができる。

不定形の極限を求めるときには，このように「分子の　　　」が有効な場合がある。

## [MEMO]

**3** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

# Point Pickup

**無理式の極限**

形式的に $\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ (不定形)の形となる無理式の極限

→ 分母や分子の有理化や，$n>0$ のとき $n=\sqrt{n}$ であることを利用して，式変形により極限が求められる形にする。

# 第 2 講　PART3 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

**1**　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$ ア

①　0　　②　1　　③　$-1$

④　2　　⑤　$\infty$　　⑥　$-\infty$

**2**　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+1}}=$ イ

①　0　　②　1　　③　$-1$

④　2　　⑤　$\infty$　　⑥　$-\infty$

**3**　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=$ ウ

①　0　　②　1　　③　$-1$

④　2　　⑤　$\infty$　　⑥　$-\infty$

**4**　$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=$ エ

①　0　　②　1　　③　$-1$

④　2　　⑤　$\infty$　　⑥　$-\infty$

# PART4 数列の大小関係と極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① 数列の大小関係と極限

数列の極限について，次のことが成り立つ。

**数列の大小関係と極限①**

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq b_n$ のとき

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ならば $\alpha \leqq \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

(1)について，すべての自然数 $n$ で $a_n<b_n$，つまり $a_n=b_n$ となる $n$ が存在しなかったとしても，必ずしも $\alpha<\beta$ とは限らず，$\alpha=\beta$ となることがある。

(ex) $a_n=1+\frac{1}{n}$，$b_n=1+\frac{2}{n}$ のとき，すべての自然数 $n$ で $a_n<b_n$ であるが

$\lim_{n\to\infty} a_n=1$，$\lim_{n\to\infty} b_n=1$　つまり，$\alpha=\beta$ である。

### 要点 ② はさみうちの原理

数列の極限について，次のことが成り立つ。

**数列の大小関係と極限②**

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

(ex) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}$ について

$n$=1，2，3，4，5，6……のとき $\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{6}$，……

ここで，　　$\leqq \cos\frac{n\pi}{3} \leqq$　　より　　$\leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3} \leqq$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=$　，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$　　より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{3}=$

**[MEMO]**

**4** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

## Point Pickup

**はさみうちの原理**

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

直接求めることが困難な極限を求める場合に有効。

また，$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，定数列(定数の数列)でもよい。

# 第 2 講　PART4 確認問題

**1**　次の極限を求めよ。ただし，ア，イ は，下の①～④のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$

〔解答〕　$-1 \leqq \cos\frac{n\pi}{4} \leqq 1$ より，

$$\boxed{ア} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} \leqq \boxed{イ}$$

$\lim_{n\to\infty}\boxed{ア}=\boxed{ウ}$，$\lim_{n\to\infty}\boxed{イ}=\boxed{エ}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=\boxed{オ}$$

①　$n$　　②　$-n$　　③　$\frac{1}{n}$　　④　$-\frac{1}{n}$

**2**　次の極限を求めよ。ただし，カ，キ は，下の①～④のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

〔解答〕　$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ より，

$$\boxed{カ} \leqq \frac{(-1)^n}{n+1} \leqq \boxed{キ}$$

$\lim_{n\to\infty}\boxed{カ}=\boxed{ク}$，$\lim_{n\to\infty}\boxed{キ}=\boxed{ケ}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\boxed{コ}$$

①　$\frac{1}{n}$　　②　$-\frac{1}{n}$　　③　$\frac{1}{n+1}$　　④　$-\frac{1}{n+1}$

# 第 3 講　無限等比数列の極限

# PART1　無限等比数列の極限と収束条件

## 要点整理と公式

### 要点 ①　無限等比数列

数列 $a$，$ar$，$ar^2$，……，$ar^{n-1}$，……を，初項 $a$，公比 $r$ の「無限等比数列」という。

初項 $r$，公比 $r$ の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について考える。

(Ⅰ)　$r>1$ のとき

$r=1+h\ (h>0)$ とおくと　　$r^n=(1+h)^n$　……①

二項定理を用いると

$$(1+h)^n={}_nC_0+{}_nC_1h+{}_nC_2h^2+\cdots\cdots+{}_nC_nh^n$$

$$=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n\geqq 1+nh\ (h>0\text{より})$$

つまり $(1+h)^n\geqq 1+nh$ がすべての自然数 $n$ で成り立つ。

$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ であるから $\lim_{n\to\infty}(1+h)^n=\infty$　　したがって $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

(Ⅱ)　$r=1$ のとき

すべての自然数 $n$ について $r^n=1$ であるから $\lim_{n\to\infty}r^n=1$

(Ⅲ)　$0<r<1$ のとき

$\frac{1}{r}=s$ とおくと $s>1$　　よって(Ⅰ)より $\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$

したがって $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{s}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$

(Ⅳ)　$r=0$ のとき

すべての自然数 $n$ について $r^n=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

(Ⅴ)　$-1<r<0$ のとき

$|r|=s$ とおくと $0<s<1$　　よって(Ⅲ)より $\lim_{n\to\infty}s^n=0$

したがって，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}s^n=0$

ここで，$-|r^n| \leqq r^n \leqq |r^n|$

$\lim_{n\to\infty}(-|r^n|)=0$，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$ であるから $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(Ⅵ)　$r=-1$ のとき

数列 $\{r^n\}$ は $-1$，$1$，$-1$，$1$，……となる。

よって，数列 $\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

(Ⅶ)　$r<-1$ のとき

$|r|=s$ とおくと $s>1$　　よって(I)より $\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$

よって，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$ であるが，数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互に変わる。

したがって，数列 $\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

以上より，次のことが成り立つ。

**数列 $\{r^n\}$ の極限**

| | | |
|---|---|---|
| $r>1$ のとき | $\lim_{n\to\infty} r^n=$ | 正の無限大に発散 |
| $r=1$ のとき | $\lim_{n\to\infty} r^n=$ | 収束 |
| $|r|<1$ のとき | $\lim_{n\to\infty} r^n=$ | 収束 |
| $r\leqq -1$ のとき | 振動 | 極限はない |

## 要点② 無限等比数列の収束条件

数列 $\{r^n\}$ の極限の性質から，次のことがわかる。

**数列 $\{r^n\}$ の収束条件**

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は　　　　　である。

(ex) 無限等比数列 $1$，$x-1$，$(x-1)^2$，$(x-1)^3$，……が収束するような $x$ の値の範囲

この数列の公比は $x-1$ であるから，収束する条件は

$x-1$

よって，$0<x\leqq 2$

**1** (1) 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$　(ii) $\left(\frac{5}{4}\right)^n$　(iii) $(-2)^n$　(iv) $-2\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$　(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}$

(3) 数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような $x$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

---

# Point Pickup

**数列 $\{r^n\}$ の極限**

$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=$

$|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n=$

$r\leqq -1$ のとき　（極限はない）

$r^n$ を含む不定形

・整式　→ もっとも底が大きい項で「　　　」

・分数式 → 分母の底が最も大きい項で「分母・分子を　　　」

**数列 $\{r^n\}$ の収束条件**

数列 $\{r^n\}$ が収束する $\iff$ 　　$r$

# 第 3 講 PART1 確認問題

第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

答えは下の①～⑤のうちから選べ。

**1** $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ ア

① 0 に収束 ② 1 に収束

③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散

⑤ 振動する

**2** $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ イ

① 0 に収束 ② 1 に収束

③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散

⑤ 振動する

**3** $(-3)^n$ ウ

① 0 に収束 ② 1 に収束

③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散

⑤ 振動する

**4** $\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ エ

① 0 に収束 ② 1 に収束

③ 正の無限大に発散 ④ 負の無限大に発散

⑤ 振動する

次の問いに答えよ。

**5** 次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=$ オ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**6** 次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+2^n}=$ カ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**7** 数列 $\{(x-2)^n\}$ が収束するような $x$ の値の範囲を求めよ。

キ $<x\leqq$ ク

また，極限値は，

キ $<x<$ ク のとき，ケ

$x=$ ク のとき，　コ

である。

**[MEMO]**

# PART2 漸化式と極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① 隣接２項間漸化式と極限

漸化式で表された数列について，一般項を求めることによってその極限を求めることができる。

(ex) $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ ……①($n=1$，2，3，……)で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限

①の $a_{n+1}$，$a_n$ を $\alpha$ におき換えた方程式 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha+3$ を解くと，$\alpha=6$

よって，$6=\frac{1}{2}\cdot6+3$ ……②

① − ②より

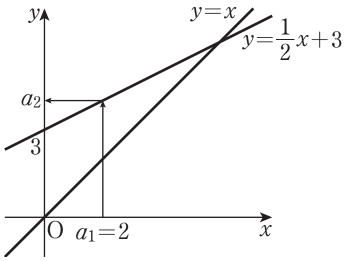
$$a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6) \qquad \text{また } a_1-6=2-6=-4$$

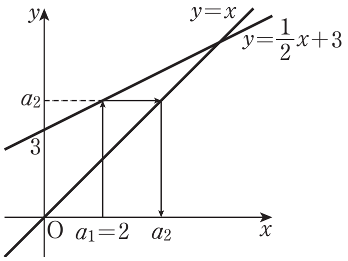
よって，数列 $\{a_n-6\}$ は，初項 $-4$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

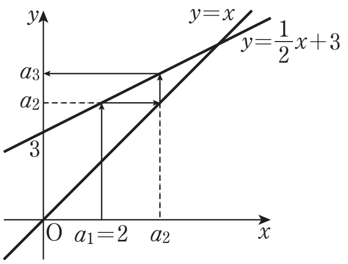
したがって $a_n-6=-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ゆえに $a_n=6-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

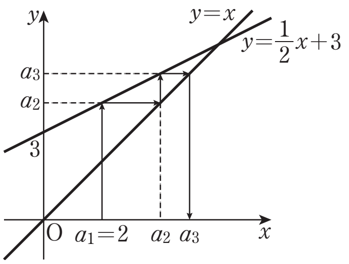
$-1<\frac{1}{2}<1$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}a_n=6$

①は，点 $(a_n,\ a_{n+1})$ が直線 $y=\frac{1}{2}x+3$ 上にあることを示している。$x=a_1$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入して得られる値が $y=a_2$ であり，この $y=a_2$ を $x=a_2$ として $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入して得られる値が $y=a_3$ である。このように，求めた $y$ 座標を，次の $x$ 座標とみなすために，グラフ $y=x$ を用意する。



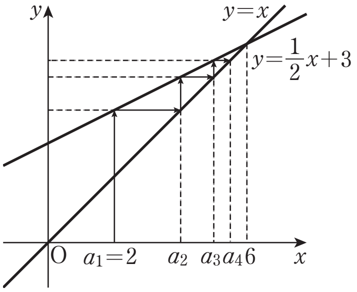



以下，同様にして $a_4$，$a_5$，$a_6$，……を $x$ 軸上にとっていくと，その値は

$y=\dfrac{1}{2}x+3$ と $y=x$ のグラフの共有点の $x$ 座標

に近づいていくことがわかる。




この共有点の $x$ 座標 6 が，数列 $\{a_n\}$ の極限値である。

**2** 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=6$, $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+3$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=4a_n+6$

## Point Pickup

**隣接２項間漸化式と極限**

隣接２項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列 $\{a_n\}$ の極限

→ 特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ の解 $\alpha$（特性解）を用いて，与えられた漸化式を

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 $p$ の等比数列である。

このことを用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め，その極限を求める。

# 第 3 講 PART2 確認問題

**1** 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項および極限を求めよ。ただし，［ウ］は下の①～⑥のうちから選べ。

$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

一般項　$a_n=$［ア］$+$［イ］$\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

極限　［ウ］

① 1　② 2　③ $-1$

④ $-2$　⑤ $\infty$　⑥ 振動

**2** 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項および極限を求めよ。ただし，［カ］は下の①～⑥のうちから選べ。

$a_1=6,\ a_{n+1}=3a_n-2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

一般項　$a_n=$［エ］$+$［オ］$\cdot 3^{n-1}$

極限　［カ］

① 1　② 2　③ $-1$

④ $-2$　⑤ $\infty$　⑥ 振動

# 第 4 講　無限級数

# PART1　無限級数の収束と発散

## 要点整理と公式

### 要点 ①　無限級数の収束と発散

無限数列 $a_1$, $a_2$, $a_3$, ……, $a_n$, ……の各項を，前から順に ＋ の記号で結んで得られる式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

を「　　　　　」といい，$a_1$ をこの無限級数の初項，$a_n$ を第 $n$ 項という。

この無限級数を，記号Σを用いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き表す。

無限数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると，数列 $\{S_n\}$ において

$$S_1=a_1$$

$$S_2=a_1+a_2$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

である。このとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

を，この無限級数の「第 $n$ 項までの　　　　」という。

数列 $\{S_n\}$ : $S_1$, $S_2$, $S_3$, ……, $S_n$, ……が収束して，その極限値が $S$, すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

のとき，無限級数①は「　　　」する，といい，この $S$ を無限級数の「　　」という。

またこのとき

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots \quad \text{または} \quad S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き表す。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数①は「　　　」する，という。

(ex) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

について，初項から第 $n$ 項までの部分和を $S_n$ とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\qquad\qquad\Big)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=$

したがって，この無限級数は「　　　」し，その「　　」は 1 である。

無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

について，初項から第 $n$ 項までの部分和を $S_n$ とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=$

したがって，この無限級数は「　　　」する。

**1**　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$

# Point Pickup

**無限級数の収束・発散**

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散は，「　　　　　」$S_n$ について

$S_n$ が値 $S$ に収束する …… $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束。$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の「　　」は $S$

$S_n$ が発散する　　　　 …… $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

# 第 4 講　PART1 確認問題

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。また，答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$

ア

① 収束し，その和は 1　② 収束し，その和は 2

③ 収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$　④ 発散する

**2** $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}+\cdots\cdots$

イ

① 収束し，その和は 1　② 収束し，その和は 2

③ 収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$　④ 発散する

# PART2 無限等比級数の収束と発散

## 要点整理と公式

### 要点① 無限等比級数の収束と発散

初項 $a$，公比 $r$ の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

を，初項 $a$，公比 $r$ の「　　　　　　」という。

無限等比級数の収束，発散について考える。①の第 $n$ 項までの部分和を $S_n$ とする。

$a=0$ のとき，$S_n=0$ であるから，無限等比級数①は収束し，その和は 0 である。

$a\neq 0$ のとき

$r=1$ のとき $S_n=a+a+a+\cdots\cdots+a=na$

$a\neq 0$ であるから，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

よって，無限等比級数①は発散する。

$r\neq 1$ のとき $S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$|r|<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$

よって，無限等比級数①は収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r|>1$ または $r=-1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は正の無限大に発散または振動するから，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

よって，無限等比級数①は発散する。

以上より，次のことが成り立つ。

**無限等比級数の収束と発散**

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束・発散は

$a\neq 0$ のとき

$|r|$　1 ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r|$　1 ならば発散する。

$a=0$ のとき　　収束し，その和は 0 である。

(ex) 無限等比級数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ は，初項 ，公比 であり， であるからこの無限等比級数は収束し，その和は $\frac{\qquad}{1-\qquad}=\frac{2}{3}$

無限等比級数 $3+2\sqrt{3}+4+\frac{8\sqrt{3}}{3}+\cdots\cdots$ は，初項 3，公比 $\frac{\qquad}{\qquad}=$ であり， であるから，この無限等比級数は発散する。

## 要点 ② 無限等比級数の収束条件

無限等比級数の収束・発散の整理から，次のことがわかる。

**無限等比級数の収束条件**

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ が収束するための必要十分条件は $a=0$ または $|r|<1$

(ex) 無限等比級数 $1+3x+9x^2+27x^3+\cdots\cdots$ が収束するような $x$ の値の範囲

この無限等比級数の初項は 1，公比は $3x$ であるから，収束する条件は

$-1<3x<1$ 　よって $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

**2** (1) 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

(i) $-2+3-\frac{9}{2}+\cdots\cdots$ (ii) $(3+\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2) 次の無限等比級数が収束するような $x$ の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots\cdots$$

## Point Pickup

**無限等比級数の収束と発散**

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束・発散は

$a\neq 0$ のとき

$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\frac{a}{1-r}$ 　　$|r|\geqq 1$ ならば発散

$a=0$ のとき 　収束し，その和は 0

**無限等比級数の収束条件**

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ の収束条件は $a=0$ または $|r|<1$

# 第 4 講　PART2 確認問題

**1**　次の無限等比級数は収束するか発散するか，下の①，②のうちから選んで答えよ。

$9-12+16-\cdots\cdots$

［ア］

①　収束する　　　②　発散する

**2**　次の無限等比級数は収束するか発散するか，下の①，②のうちから選んで答えよ。また，その和を求めよ。

$\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})+(4\sqrt{3}-6)+\cdots\cdots$

［イ］

①　収束する　　　②　発散する

その和は，［ウ］$\sqrt{［エ］}+$［オ］

**3**　無限等比級数 $x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots\cdots$ について，

収束するような $x$ の値の範囲は，

$-$［カ］$<x\leqq$［キ］であり，

その和は，

$x=$［キ］のとき，［ク］

$-$［カ］$<x<$［キ］のとき，［ケコ］

である。

# PART3　無限級数と数列の一般項，無限級数の性質

## 要点整理と公式

### 要点 ①　無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ について考える。

この無限級数の第 $n$ 項までの部分和を $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ とすると

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ とすると，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

したがって，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

**無限級数が収束するための必要条件**

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　……(＊)

(＊)の逆，すなわち「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　$\Longrightarrow$　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する」は必ずしも成り立たない。

たとえば $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ は，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ について

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1 \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) =$$

であるから，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

また，（＊）の対偶

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する ……（＊＊）

が成り立つ。つまり，数列 $\{a_n\}$ の一般項の極限が 0 に収束しないならば，部分和を調べることなく無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することがわかる。（＊＊）の逆は必ずしも成り立たない。

## 要点② 無限級数の性質

数列の極限値の性質から，次のことが成り立つ。

**無限級数の性質**

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，その和がそれぞれ $S$，$T$ であるとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS \qquad (k \text{ は定数})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$$

(ex) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)$ の和について

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ は，初項 $\frac{1}{5}$，公比 $\frac{1}{5}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{1}{4}\right|$　　，$\left|\frac{1}{5}\right|$　　であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ はともに「　　　」する。

その和はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

**3** (1) 無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}$ の和を求めよ。

## Point Pickup

**無限級数の収束・発散**

① 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

② 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する

**無限級数の性質**

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，その和がそれぞれ $S$, $T$ であるとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+lb_n)=kS+lT \qquad (k,\ l\text{ は定数})$$

# 第 4 講　PART3 確認問題

**1**　無限級数 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots$ において，第 $n$ 項を $a_n$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

よって，この無限級数は $\boxed{\text{ウ}}$。

$\boxed{\text{ウ}}$ は次の①，②のうちから選べ。

①　収束する　　　②　発散する

**2**　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$ の和は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

# 第 5 講　関数の極限

# PART1 関数の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ①　関数の極限

関数 $f(x)$ において，$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくならば，$f(x)$ は $\alpha$ に「　　　」するといい

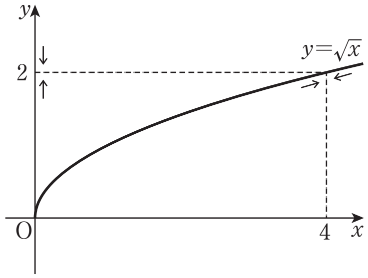
$f(x)=\alpha$　または　　　　　のとき　$f(x)$

と表す。また，このときの $\alpha$ を，$x$ が $a$ に近づくときの $f(x)$ の「　　　　」という。

(ex) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ において，$x$ が 4 と異なる値をとりながら 4 に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値は $\sqrt{4}=2$ に限りなく近づく。よって

$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$　または　$x\to 4$ のとき $\sqrt{x}\to 2$

と表される。




数列の場合と同様に，関数の極限値についても，次のことが成り立つ。

**関数の極限の性質**

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$　のとき

① $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\alpha$　（ただし，$k$ は定数）

② $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$　　$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

③ $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$　　$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$\beta\neq 0$）

### 要点 ②　関数の極限の計算

関数 $f(x)$ が $x$ の整式で表される関数，三角関数，指数関数，対数関数，分数関数，無理関数であるとき，$a$ が関数の定義域に属するならば，次のことが成り立つ。

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

(ex) $\lim_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

※定数関数 $f(x)=c$ については，$\lim_{x\to a}f(x)=c$ である。例えば，$\lim_{x\to 1}2=2$ である。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在する場合がある。

たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ は，$x=$ 　のとき

分母が 0 になるので，$x=$ 　では定義されていない。

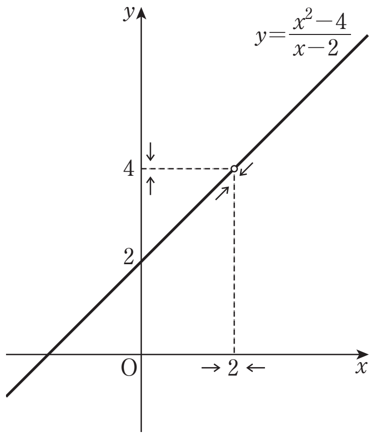
しかし，$x$ キ　のとき

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

と変形できることから

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=$$

となり，$\lim_{x\to 2}f(x)$ は存在する。




(ex) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\qquad\qquad}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{\qquad}{\qquad}$

$=\dfrac{1}{2^2+2\cdot 2+4}=\dfrac{1}{12}$

　形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ となる極限，いわゆる「　　　　」の極限については，数列の極限と同様，適切な式変形によって極限が求められる形にする。

**1** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-2x+5)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+4}{x-1}$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to5}\sqrt{2x-1}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

# Point Pickup

**関数の極限の計算**

関数 $f(x)$ が $x$ の整式，三角・指数・対数関数，分数・無理関数であるとき，$a$ が関数の定義域に属するならば，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

つまり，$f(x)$ に $x=a$ を代入して得られる値が極限値である。

**$\frac{0}{0}$ の不定形の極限**

形式的に $\frac{0}{0}$ の形となる関数の極限

→ 因数分解＆約分，有理化などの式変形により極限が求められる形にする。

# 第 5 講　PART1 確認問題

次の極限を求めよ。

**1**　$\lim_{x \to 3}(x^2-2x+4)=$ [ア]

**2**　$\lim_{x \to 4}\dfrac{2x-5}{x-1}=$ [イ]

**3**　$\lim_{x \to 5}\sqrt{3x+1}=$ [ウ]

**4**　$\lim_{x \to 2}\dfrac{3x^2-12}{x^2-x-2}=$ [エ]

**5**　$\lim_{x \to 0}\dfrac{1}{x}\left(4-\dfrac{8}{x+2}\right)=$ [オ]

**6**　$\lim_{x \to -2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\dfrac{[カ]}{[キ]}$

# PART2 極限値の条件による関数の決定

## 要点整理と公式

### 要点① 極限値の条件による関数の決定

関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0$$

ならば，極限値の性質により

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\alpha\cdot 0=0$$

であるから，次のことが成り立つ。

**分母→ 0 となる分数式が収束するための必要条件**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0 \quad \text{ならば } \lim_{x\to a}f(x)=0$$

つまり，$\lim_{x\to a}f(x)=0$ であることは，$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ が成り立つための　　条件である。

(ex) 等式 $\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=6$ が成り立つような定数 $a$，$b$ の値

$\lim_{x\to 3}(\qquad)=\quad$ であるから，等式 $\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=6$ ……① の左辺が収束するためには $\lim_{x\to 3}(\qquad\qquad)=\quad$ であることが　　である。

よって　$9a+3b=0$ より $b=-3a$ ……②

このとき

$$\lim_{x\to 3}\frac{ax^2+bx}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{ax^2-3ax}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{ax(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}ax=3a$$

となり，①の左辺は $3a$ に収束する。

①より $3a=6$　　よって　$a=2$

②より $b=-6$

したがって　$a=2$，$b=-6$

**[MEMO]**

**2** 等式 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$ が成り立つように，定数 $a$，$b$ の値を求めよ。

## Point Pickup

**極限値の条件による関数の決定**

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ ならば $\lim_{x\to a}f(x)=0$

であることを利用

$\lim_{x\to a}f(x)=0$ は，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が収束するための必要条件にすぎないため，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が収束するかの確認(十分性の確認)を行い，実際に極限値が $\alpha$ となるように関数の係数を定める。

# 第 5 講　PART2 確認問題

**1**　等式 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+a}{x-1}=b$ が成り立つような定数 $a$，$b$ の値は，

$a=$ アイ，$b=$ ウ である。

**2**　等式 $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=1$ が成り立つような定数 $a$，$b$ の値を求める。

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=$ エ であるから，

$b=$ オ $a-$ カ ……(＊)

(＊)を用いると，

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=a-$ キ

であるから，求める $a$，$b$ の値は，

$a=$ ク，$b=$ ケ

である。

# PART3 ±∞に発散，右極限と左極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① 正の無限大に発散，負の無限大に発散

関数 $f(x)$ において，$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，$f(x)$ は「　　　　　　　　　　」するといい

$\lim_{x \to a} f(x) =$ 　　　　　または　　　$x \to a$ のとき $f(x) \to$

と表す。

また，関数 $f(x)$ において，$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$f(x)$ は「　　　　　　　　　　」するといい

$\lim_{x \to a} f(x) =$ 　　　　　または　　　$x \to a$ のとき $f(x) \to$

と表す。

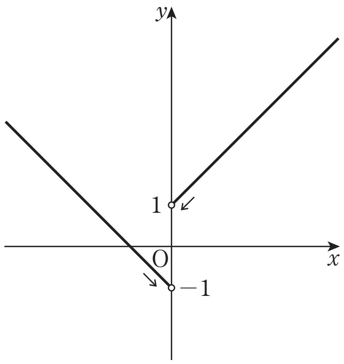
(ex) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} =$ 　　　　　$\lim_{x \to 2} \left\{ -\frac{1}{(x-2)^2} \right\} =$

### 要点 ② 片側からの極限

関数 $f(x) = \frac{x(x+1)}{|x|}$ について，$x \to 0$ のときの極限を考える。

$x > 0$ のとき $f(x) = \frac{x(x+1)}{x} = x+1$

$x < 0$ のとき $f(x) = \frac{x(x+1)}{-x} = -x-1$




$x$ が 0 より大きい値をとりながら限りなく 0 に近づくと，$f(x)$ の値は限りなく 1 に近づく。

$x$ が 0 より小さい値をとりながら限りなく 0 に近づくと，$f(x)$ の値は限りなく $-1$ に近づく。

よって，$x$ の 0 への近づき方によって $f(x)$ が近づく値が異なるので，$x \to 0$ のときの $f(x)$ の極限は存在しない。

$x$ が $a$ より大きい値をとりながら限りなく $a$ に近づくことを　$x\to a$

$x$ が $a$ より小さい値をとりながら限りなく $a$ に近づくことを　$x\to a$

と表す。特に $a=0$ のときは，それぞれ $x\to$ 　，$x\to$ 　と表す。

$x\to a$ 　のときの関数 $f(x)$ の極限を，$x$ が $a$ に近づくときの $f(x)$ の「　(側)極限」

といい，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ と表す。上記の例だと，$\lim\limits_{x\to} f(x)=1$ である。

$x\to a$ 　のときの関数 $f(x)$ の極限を，$x$ が $a$ に近づくときの $f(x)$ の「　(側)極限」

といい，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ と表す。上記の例だと，$\lim\limits_{x\to} f(x)=-1$ である。

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ と $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ の両方が存在し，それらが一致するとき，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在する。

一般に，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

右極限が正の無限大，負の無限大になる場合は，それぞれ次のように表す。

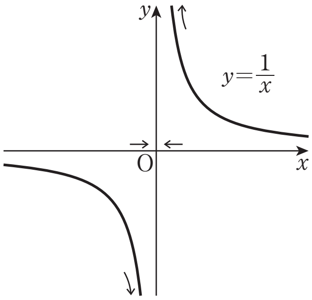
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$$

左極限の場合も同様に表す。

(ex) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について

$\lim\limits_{x\to +0} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=$



**3** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{|x+1|}{x+1}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$

## Point Pickup

**±∞に発散**

関数 $f(x)$ において，$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき

$f(x)$ の値が限りなく大きくなる場合（正の無限大に発散）

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \qquad (x\to a \text{ のとき } f(x)\to\infty)$$

$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなる場合（負の無限大に発散）

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty \qquad (x\to a \text{ のとき } f(x)\to-\infty)$$

**右極限と左極限**

右極限：$x\to a+0$（$x>a$ で，$x\to a$）のときの $f(x)$ の極限。$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$ と表す。

左極限；$x\to a-0$（$x<a$ で，$x\to a$）のときの $f(x)$ の極限。$\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)$ と表す。

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

# 第 5 講　PART3 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑦のうちから選べ。

**1** $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$　ア

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$
⑦ 極限はない

**2** $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$　イ

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$
⑦ 極限はない

**3** $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}$　ウ

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$
⑦ 極限はない

**4** $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{|x-2|}{x-2}$　エ

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$
⑦ 極限はない

**5** $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}$ [オ]

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

**6** $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)$ [カ]

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

**7** $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)$ [キ]

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

**[MEMO]**

# PART4 $x\to\pm\infty$のときの極限，指数・対数関数の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① $x\to\pm\infty$のときの関数の極限

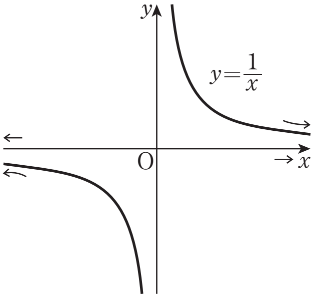
変数 $x$ が限りなく大きくなることを $x\to\infty$ と表す。また，変数 $x$ が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x\to-\infty$ と表す。

$x\to\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく $\alpha$ に近づくならば，

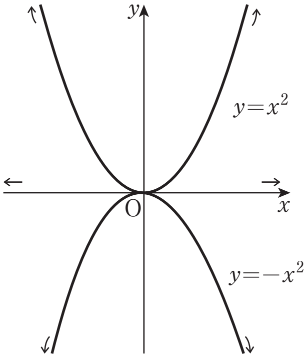
$\lim\limits_{x\to} f(x)=\alpha$ と表す。

$x\to-\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく $\alpha$ に近づくならば，

$\lim\limits_{x\to} f(x)=\alpha$ と表す。




(ex) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=$　　，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=$




$x\to\infty$ のとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，

$\lim\limits_{x\to} f(x)=\infty$ と表し，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$\lim\limits_{x\to} f(x)=-\infty$ と表す。

$x\to-\infty$ のときも同様に表す。

(ex) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=$　　　$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=$

$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2)=$　　，$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=$

また，右の＜極限値の性質＞については，$x\to a$ を $x\to\infty$，$x\to-\infty$ におき換えても成り立つ。

(ex) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-5}{3x^2-2x+4}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}$ ――――― $=$

「　　　　」の極限については，数列の極限と同様，適切な式変形により極限が求められる形にする。

| ＜極限値の性質＞ |
|---|
| $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき |
| $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\alpha$　　（$k$ は定数） |
| $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$ |
| $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　$(\beta\neq0)$ |

## 要点 ② 指数関数・対数関数の極限

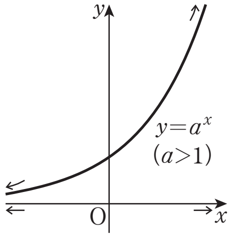
指数関数 $y=a^x$ の極限については，次のことがいえる。

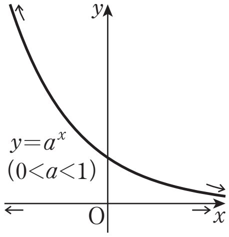
$a>1$ のとき

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x =\quad$ ，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x =$

$0<a<1$ のとき

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x =\quad$ ，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x =$



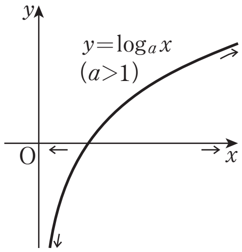

対数関数 $y=\log_a x$ の極限については，次のことがいえる。

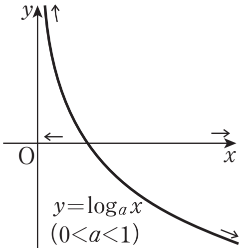
$a>1$ のとき

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x =\quad$ ，$\lim\limits_{x\to} \log_a x =$

$0<a<1$ のとき

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x =\quad$ ，$\lim\limits_{x\to} \log_a x =$



**4** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)$

(3) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

## Point Pickup

**$x\to\pm\infty$の極限**

関数の極限を求める際に，形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ の形となる極限，いわゆる不定形の極限については，数列の極限同様，くくり出し，分母の最高次数の項で分母・分子を割る，有理化などによって，極限が求められる形に変形する。

**指数・対数関数の極限**

底$>1$，または$0<$底$<1$のいずれであるかに注目し，指数関数，対数関数のグラフをイメージする。

# 第 5 講　PART4 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

**1**　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$　ア

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**2**　$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)$　イ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**3**　$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x}$　ウ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**4**　$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}$　エ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**5**　$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$　オ

① $0$　② $\frac{1}{2}$　③ $1$

④ $-1$　⑤ $\infty$　⑥ $-\infty$

**6** $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$ 　カ

① $0$ 　② $\frac{1}{2}$ 　③ $1$

④ $-1$ 　⑤ $\infty$ 　⑥ $-\infty$

**7** $\lim_{x \to \infty} \frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$ 　キ

① $0$ 　② $\frac{1}{2}$ 　③ $1$

④ $-1$ 　⑤ $\infty$ 　⑥ $-\infty$

**8** $\lim_{x \to +0} \log_3 \frac{1}{x}$ 　ク

① $0$ 　② $\frac{1}{2}$ 　③ $1$

④ $-1$ 　⑤ $\infty$ 　⑥ $-\infty$

**[MEMO]**

# 第 6 講　三角関数の極限，関数の連続

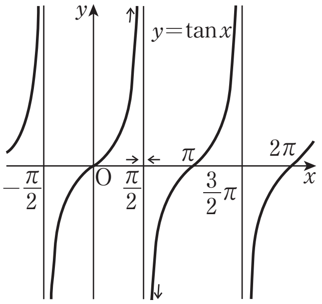
# PART1 三角関数の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ①　三角関数の極限

三角関数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ は，$-1$ から $1$ の間のすべての値を周期 $2\pi$ でくり返しとり，一定の値に近づくことはない。よって，$\lim_{x\to\infty}\sin x$，$\lim_{x\to\infty}\cos x$ は存在しない。

三角関数 $y=\tan x$ について，$y=\tan x$ のグラフにより




$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=$　　　，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=$

よって，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しない。

(ex) $\lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$，　$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos 0=1$，　$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=$

### 要点 ②　関数の極限の性質

関数の極限について，次のことが成り立つ。

**関数の大小関係と極限**

(1)　$x=a$ の付近で，つねに $f(x)\leqq g(x)$ かつ

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ ならば $\alpha\leqq\beta$

(2)　$x=a$ の付近で，つねに $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ならば $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

(1)について，$x=a$ の付近で，つねに $f(x)<g(x)$，つまり $f(x)=g(x)$ となる $x$ が存在しなかったとしても，必ずしも $\alpha<\beta$ とは限らず，$\alpha=\beta$ となることがある。

(ex) $f(x)=x^2$，$g(x)=x^2+x$ において，$x>0$ のとき，$x=0$ の付近でつねに $f(x)<g(x)$ であるが $\lim_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim_{x\to 0}g(x)=0$　　つまり，$\alpha=\beta$ である。

(1)，(2)については，$x\to\infty$，$x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

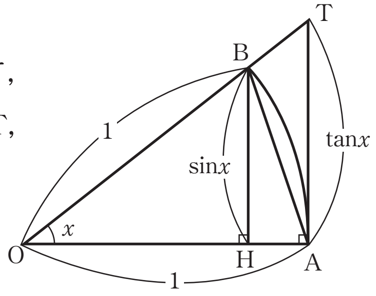
## 要点③ $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

三角関数 $\sin x$ を含む極限について，次のことが成り立つ。ただし，角の単位は弧度法とする。

> **$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限**
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

このことを証明する。$x\to 0$ のときを考えるので，$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(i)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき




中心が点O，半径1，中心角 $x$ の扇形OABにおいて，
点Aにおける円Oの接線が直線OBと交わる点をT，
点BからOAに下ろした垂線をBHとする。
面積について，△OAB < 扇形OAB< △OAT

つまり $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$

すなわち $\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より，各辺 $\sin x$ で割ると $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to +0}\cos x=$　　より　$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき

$x=-t$ とおくと　$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t}=1$

(i)，(ii)より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(ex) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　　$=$　　$=2$

**1** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

## Point Pickup

**$\dfrac{\sin x}{x}$ の極限**

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を利用して極限を求める。

※$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ の□は，$x\to 0$ のとき □ $\to 0$ となる「　　　　」である必要がある。

# 第 6 講 PART1 確認問題

次の極限を求めよ。

**1** $\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x}{2x} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

**2** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

**3** $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x} = \boxed{オ}$

**4** $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

# PART2 おき換え，はさみうちによる三角関数の極限

## 要点整理と公式

### 要点 ① おき換えによる三角関数の極限

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が使える形に変形するために，おき換えが有効な場合がある。

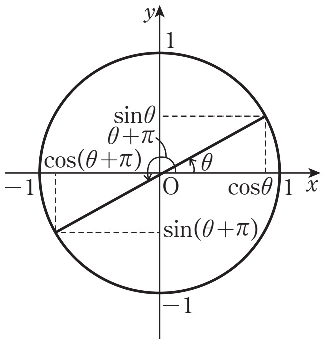
(ex) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

$x-\pi = t$ とおくと　$x \to \pi$ のとき $t \to$

また　$x =$

よって $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{t \to} \frac{\sin(\qquad)}{} = \lim_{t \to 0} \frac{}{}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$




### 要点 ② はさみうちによる三角関数の極限

関数の極限の性質

> $x = a$ の付近で，つねに $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ
>
> $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ ならば　$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

を用いて(はさみうちの原理)，式変形やおき換えによって求めることが困難な三角関数の極限を求める。

(ex) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

$-1 \leqq \sin \frac{1}{x} \leqq 1$ より

$x > 0$ のとき $-x \leqq x \sin \frac{1}{x} \leqq x$　　　$x < 0$ のとき $x \leqq x \sin \frac{1}{x} \leqq -x$

$\lim_{x \to 0} (-x) =$　，$\lim_{x \to 0} x =$　　　より　$\lim_{x \to +0} x \sin \frac{1}{x} =$　，$\lim_{x \to -0} x \sin \frac{1}{x} =$

したがって　$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} =$

**[MEMO]**

**2** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x}$

# Point Pickup

**おき換え，はさみうちによる三角関数の極限**

適切な変形やおき換えにより，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使える形にする。

変形によって極限を直接求めることが難しい場合は，はさみうちの原理の利用を検討する。

# 第 6 講 PART2 確認問題

次の極限を求めよ。

**1** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}=$ ア

**2** $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=$ イ

次の極限を求めよ。ただし，ウ，エ は下の①～④のうちから選べ。

**3** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

〔解答〕

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき，

$$\boxed{ウ}\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq\boxed{エ}$$

この不等式を利用して極限を求めると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\boxed{オ}$$

① $x$　② $-x$　③ $\dfrac{1}{x}$　④ $-\dfrac{1}{x}$

次の極限を求めよ。ただし，[ク]，[ケ] は下の①～④のうちから選べ。

**4** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

〔解答〕

$-1 \leqq \cos\dfrac{1}{x} \leqq 1$ であるから，[カ] $\leqq 1-\cos\dfrac{1}{x} \leqq$ [キ]

$x \neq 0$ のとき，[ク] $\leqq x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right) \leqq$ [ケ]

この不等式を利用して極限を求めると，

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \boxed{\text{コ}}$$

① $0$　② $x$　③ $x^2$　④ $2x^2$

**[MEMO]**

# PART3 関数の連続

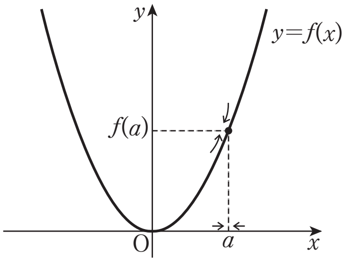
## 要点整理と公式

### 要点 ① 関数の連続性

$f(x)=x^2$ などの整式で表される関数は，その定義域内の任意の $x$ の値 $a$ に対して

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

が成り立っている。これにより，$y=f(x)$ のグラフは１つのつながった曲線となっている。



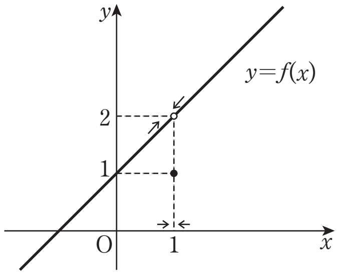

一方で

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\neq 1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

について，$y=f(x)$ のグラフは $x=1$ で切れている。この関数 $f(x)$ について

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\quad,\quad f(1)=$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ 　　$f(a)$ である。




一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域内の $x$ の値 $a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し，かつ，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は「$x=a$ で　　　」であるという。このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$ でつながっている。

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在しない，または $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)$ のとき，この関数は「$x=a$ で　　　　」であるという。このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$ で切れている。

関数の極限値の性質より，関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，次の関数も $x=a$ で連続である。

$$kf(x)\ (k\text{ は定数}),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (\text{ただし，}g(a)\neq 0)$$

関数 $f(x)$ が定義域のすべての $x$ の値で連続であるとき，$f(x)$ は「　　　　　」であるという。整式で表される関数や分数関数は連続関数である。また，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数も連続関数である。

連続関数のグラフは，すべての定義域において切れ目なくつながっている。

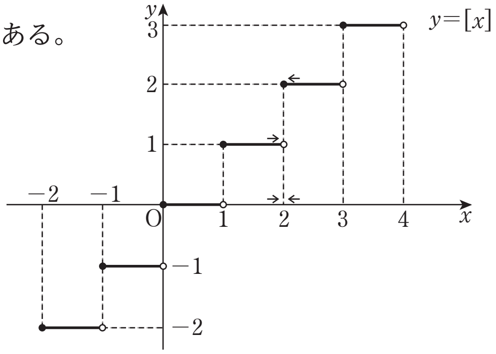
不連続な関数を考える。

$x$ を超えない最大の整数を　$x$　と表す。記号　　を「　　　　　　」という。たとえば

$[1.4]=$　，$[-3.1]=$　　，$[7]=$

である。

$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは右図であり，$x$ が整数値のところで不連続である。




たとえば，$x=2$ においては

$\lim_{x \to 2+0}[x]=$　，　$\lim_{x \to 2-0}[x]=$

であるから，$\lim_{x \to 2}[x]$ は存在せず，

関数 $f(x)=[x]$ は$x=2$ で不連続である。

## 要点② 区間における連続

不等式 $a<x<b$ などを満たす実数 $x$ の値の範囲を「　　　」という。

・区間 $a<x<b$ を「　　　　」といい，　$a$，$b$　と表す。

・区間 $a \leqq x \leqq b$ を「　　　　」といい，　$a$，$b$　と表す。

(ex)　区間 $a \leqq x<b$　…　$a$，$b$　　　区間 $a<x \leqq b$　…　$a$，$b$

　　区間 $a \leqq x$　…　$a$，　　　区間 $x<b$　…　　，$b$

　　実数全体　…

関数 $f(x)$ がある区間 $I$ のすべての $x$ の値で連続であるとき，$f(x)$ は 区間 $I$ で連続関数であるという。このとき $y=f(x)$ のグラフは，区間 $I$ において切れ目なくつながっている。

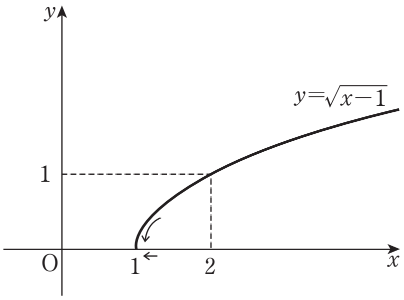
区間 $I$ が左端を含むとき，$f(x)$ が左端 $a$ において $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続である，という。同様に，区間 $I$ が右端を含むとき，$f(x)$ が右端 $b$ において $\lim_{x \to b} f(x)=f(b)$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=b$ で連続である，という。

(ex) 無理関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ について

定義域は $x \geqq 1$ であり，定義域の左端 $x=1$ において

$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}\sqrt{x-1}=0$，$f(1)=0$ より

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$




よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である。

**3** 次の関数 $f(x)$ が与えられた $x$ の値で連続であるか不連続であるか調べよ。

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ ( $x=0$ )

(2) $f(x)=\sqrt{2-x}$ ( $x=2$ )

(3) $f(x)=x[x]$ ( $x=1$ )

# Point Pickup

**関数の連続性**

関数 $f(x)$ において，その定義域内の $x$ の値 $a$ に対して

・極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在　　・$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

がともに満たされているとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

$x=a$ が定義域の

・左端の場合 → $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$　　・右端の場合 → $\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$

がそれぞれ成り立つとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，次の関数も $x=a$ で連続である。

$kf(x)+lg(x)$ ($k$，$l$ は定数)，　$f(x)g(x)$，　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$

# 第 6 講 PART3 確認問題

**1** 次の関数 $f(x)$ が，与えられた $x$ の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。

$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1} \qquad (x=1)$

[ア]

① 連続である　　　② 不連続である

**2** 次の関数 $f(x)$ が，与えられた $x$ の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。ただし，[オ] は，下の①，②のうちから選べ。

$f(x)=\sqrt{x-3} \qquad (x=3)$

〔解答〕

$$\lim_{x\to 3+0}\sqrt{x-3}=\boxed{\text{イ}}$$

また，$f(\boxed{\text{ウ}})=\boxed{\text{エ}}$

よって，$f(x)$ は $x=3$ で [オ]。

① 連続である　　　② 不連続である

**3** 次の関数 $f(x)$ が，与えられた $x$ の値で連続であるか不連続であるかを調べよ。ただし，**コ** は，下の①，②のうちから選べ。

$f(x)=x([x]+1) \qquad (x=2)$

※ $[x]$ は，$x$ を超えない最大の整数を表す。

〔解答〕

$1\leqq x<2$ のとき，$[x]=$ **カ** であるから，

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)= \boxed{\text{キ}}$$

$2\leqq x<3$ のとき，$[x]=$ **ク** であるから，

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)= \boxed{\text{ケ}}$$

よって，$f(x)$ は $x=2$ で **コ** 。

① 連続である　　② 不連続である

**[MEMO]**

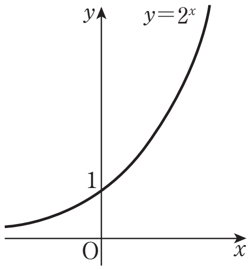
# PART4 中間値の定理

## 要点整理と公式

### 要点① 連続関数の最大値・最小値

関数 $f(x)=2^x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ における連続関数である。

$\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$ であるから，この区間で $f(x)$ の値はいくらでも大きくなる。また，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$ であるが，$f(x)$ の値が 0 になることはない。したがって，この区間における $f(x)$ の最大値，最小値はない。

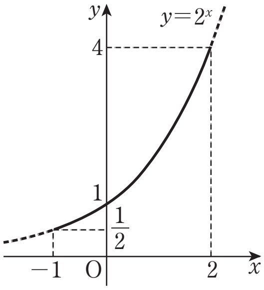



この関数 $f(x)$ を，閉区間 $[-1,\ 2]$ で考えると

最大値は $f(2)=4$

最小値は $f(-1)=\dfrac{1}{2}$

である。




一般に，次のことが成り立つ。

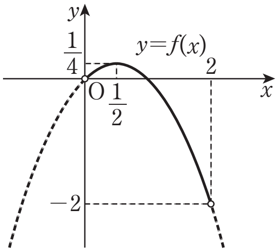
> **連続関数の最大値・最小値**
> 閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

開区間で連続な関数は，その区間で最大値や最小値をもつ場合も，もたない場合もある。

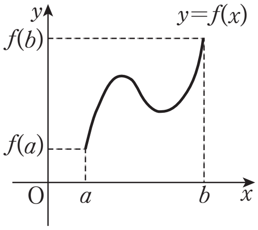
(ex) $f(x)=-x^2+x$ の $0<x<2$ における最大値，最小値について

$f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図実線部分。よって，最小値はない。

最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，このグラフは点 $(a,\ f(a))$ と点 $(b,\ f(b))$ を結ぶ，切れ目のない曲線である。$f(a) \neq f(b)$ のとき，$f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値をとる。よって，次の定理が成り立つ。

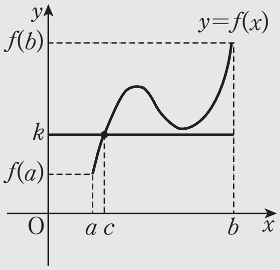



## 中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 $k$ に対して

$$f(c) = k$$

を満たす実数 $c$ が，$a$ と $b$ の間に少なくとも 1 つ存在する。



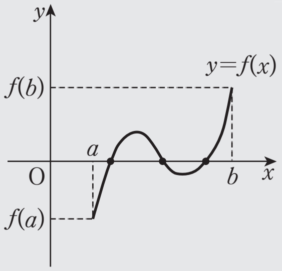

中間値の定理より，次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が

　　ならば

　　方程式 $f(x) = 0$

は，$a$ と $b$ の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。




(ex) 方程式 $3^x = 5x$ が $2 < x < 3$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示す。

$f(x) = 3^x - 5x$ とおく。

$f(x)$ は閉区間 $[2,\ 3]$ で　　　であり

$$f(2) = 3^2 - 5 \cdot 2 = -1 \qquad ,\ f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 = 12$$

であるから，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $3^x = 5x$ は，$2 < x < 3$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

**4** 方程式 $\cos x = 2x$ は, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

# Point Pickup

**中間値の定理**

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 $k$ に対して $f(c)=k$ を満たす実数 $c$ が, $a$ と $b$ の間に少なくとも1つ存在する。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で, $f(a)$ と $f(b)$ が異符号 ならば, 方程式 $f(x)=0$ は, $a$ と $b$ の間に少なくとも1つの実数解をもつ。

この定理を使うときは,「　　　　」で「　　　」であることを確認する必要がある。

# 第 6 講　PART4 確認問題

**1**　関数 $f(x)=3x-2^x$ において，方程式 $f(x)=0$ は $3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

ただし，[ア]，[イ] は，下の①，②のうちから選べ。

①　$>$　　　②　$<$

〔証明〕

$f(x)$ は区間 $[3,\ 4]$ で連続であり，

$f(3)$ [ア] $0$

$f(4)$ [イ] $0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

**2**　方程式 $\sin x=1-x$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

ただし，[ウ] ～ [オ] は，下の①～④のうちから選べ。

①　$\sin x+x-1$　　　②　$\sin x-x+1$

③　$>$　　　④　$<$

〔証明〕

$f(x)=$ [ウ] とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続であり，

$f(0)$ [エ] $0$

$f(\pi)$ [オ] $0$

よって，方程式 $f(x)=0$，すなわち $\sin x=1-x$ は，

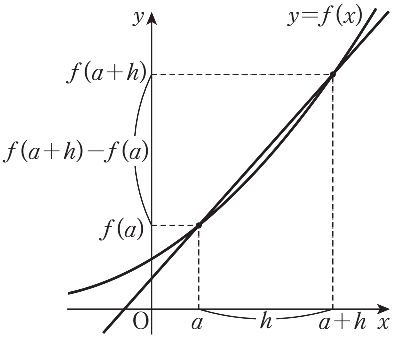
$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

# 第 7 講　微分係数と導関数

# PART1　微分係数と微分可能

## 要点整理と公式

### 要点 ①　微分係数と微分可能



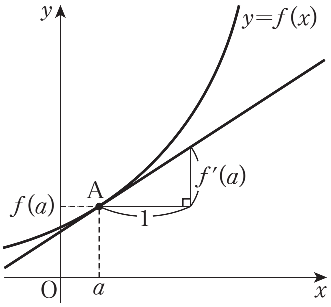

関数 $f(x)$ において，極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，この値を $f(x)$ の $x=a$ における

「　　　　　」(または変化率)

といい，　　　で表す。

**微分係数**

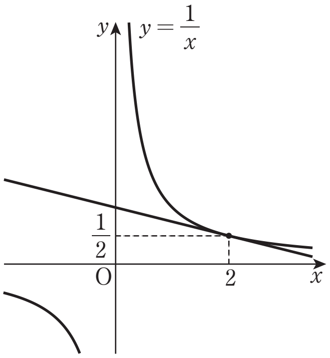
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$




微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で「　　　　　」であるという。

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線が存在し，その傾きは微分係数 $f'(a)$ に等しい。

(ex) 曲線 $y=\frac{1}{x}$ 上の点 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ における接線の傾き




$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\quad)-f(\ )}{\quad}=\lim_{h\to 0}\frac{\quad-\quad}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{2(2+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

よって，求める接線の傾きは $-\frac{1}{4}$

## 要点② 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)$ が存在する。このとき，$x=a$ で連続，すなわち $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ である。これを示す。

$$\lim_{x \to a}\{f(x)-f(a)\} = \lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\} = f'(a)\cdot \quad = \quad$$

よって $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

**微分可能と連続**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

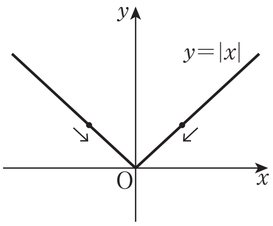
関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$f(x)$ は微分可能であるとは限らない。

(ex) 関数 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続である。

ここで

$$\lim_{h \to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to +0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0}\frac{\quad}{h} = $$

$$\lim_{h \to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to -0}\frac{|h|}{h} = \lim_{h \to -0}\frac{\quad}{h} = $$




より，右極限と左極限が一致しないので，微分係数 $f'(0)$ は存在しない。

すなわち，$f(x)=|x|$ は $x=0$ で微分可能でない。

**1** (1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではないことを示せ。

## Point Pickup

**微分係数**

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

微分係数 $f'(a)$ が存在するとき,

・$f(x)$ は $x=a$ で「微分可能」であるという。

・曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きが $f'(a)$ である。

**微分可能と連続**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Longrightarrow$ $x=a$で連続

※関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても, $x=a$ で微分可能とは限らない。

# 第 7 講 PART1 確認問題

**1** 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 (4，2) における接線の傾きを求める。

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，

$$f'(\boxed{ア})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boxed{イ}+h)-f(\boxed{ウ})}{h}=\boxed{エ}$$

よって，求める接線の傾きは $\boxed{オ}$ である。

$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ は，下の①～④のうちから選べ。

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ 2　④ 4

**2** 関数 $f(x)=|x^2-1|$ は，$x=1$ で微分可能かどうかを調べよ。

ただし，$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ は，下の①，②のうちから選べ。

[解答]

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boxed{カ}+h)-f(\boxed{カ})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}=\boxed{ク}$

$\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{|h^2+\boxed{キ}h|}{h}=\boxed{ケコ}$

右極限と左極限が，$\boxed{サ}$。

以上より，関数 $f(x)$ は $x=1$ で $\boxed{シ}$。

[$\boxed{サ}$ の選択肢]

① 一致する　② 一致しない

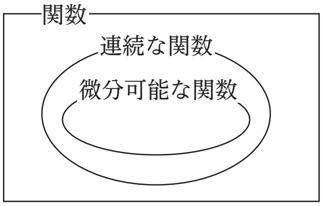
[$\boxed{シ}$ の選択肢]

① 微分可能である　② 微分可能ではない

# PART2 導関数

## 要点整理と公式

### 要点 ① 導関数




関数 $f(x)$ が，ある区間 $I$ に属するすべての $x$ の値で微分可能であるとき，関数 $f(x)$ はその「区間 $I$ で微分可能」である，という。このとき，$f(x)$ は区間 $I$ で連続である。

関数 $f(x)$ がある区間 $I$ で微分可能であるとき，$I$ に属する各値 $a$ に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させることにより，区間 $I$ で定義させる1つの新しい関数が得られる。これを関数 $f(x)$ の「　　　　」といい，記号「　　　　」で表す。関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「　　　　」という。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される。

**導関数**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)-2}-\dfrac{1}{x-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-2-\{(x+h)-2\}}{\{(x+h)-2\}(x-2)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

関数 $y=f(x)$ において，$x$ の増分 $h$ を $\Delta x$，$y$ の増分 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を $\Delta y$ とすると，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

と表される。また，関数 $f(x)$ の導関数は，$f'(x)$ のほかにも $y'$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号でも表す。

[NOTE]

**2**　次の関数を，導関数の定義にしたがって微分せよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(2)　$f(x)=\sqrt{2x-1}$

## Point Pickup

**導関数**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

# 第 7 講　PART2 確認問題

次の関数を，定義にしたがって微分せよ。

答えは下の①～⑥のうちから選べ。

**1**　$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{イ}}}{x(x+h)}$$

$$=\boxed{\text{ウ}}$$

① $1$　　② $-1$　　③ $x$

④ $x+h$　　⑤ $\dfrac{1}{x^2}$　　⑥ $-\dfrac{1}{x^2}$

**2**　$f(x)=\sqrt{x-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}-\sqrt{x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\boxed{\text{カ}}$$

① $1$　　② $-1$　　③ $x+h$

④ $x+h-1$　　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$　　⑥ $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

# PART3 導関数の公式，積の導関数

## 要点整理と公式

### 要点① $x^n$ の導関数と導関数の公式

関数 $x^n$ の導関数について，数学Ⅱにおいて次のことを学んでいる。

**$x^n$ の導関数**

$n$ が正の整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

(証明) $n$ が正の整数のとき，二項定理により

$$(x+h)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

$$(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$　より　$(x^n)'=nx^{n-1}$

また，次の導関数の公式 1 ～ 3 についても，数学Ⅱで学んだものと同様である。

**導関数の公式**

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，$k$，$l$ を定数とすると

1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　　2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3　$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

(公式 1 の証明)　$\displaystyle\{kf(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}=kf'(x)$

(公式 2 の証明)　$\displaystyle\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}=f'(x)+g'(x)$$

(公式 3 の証明)　$\{kf(x)+lg(x)\}'=\{kf(x)\}'+\{lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

## 要点② 積の微分法

導関数について，次の公式が成り立つ。

**導関数の公式**

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

4　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

（公式 4 の証明）

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-\qquad\qquad+\qquad\qquad-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから連続関数　よって　$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

したがって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(ex) 関数 $y=(2x+1)(x^2-3x-1)$ を微分すると

$$y'=(2x+1)'(x^2-3x-1)+(2x+1)(x^2-3x-1)'$$

$$=2(x^2-3x-1)+(2x+1)(2x-3)=6x^2-10x-5$$

**3** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^4-3x^2+5$

(2) $y=2x^5-3x^3+x$

(3) $y=(2x+1)(3x^2-x+2)$

(4) $y=(x^2-3)(x^2+x+1)$

## Point Pickup

**積の導関数**

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

# 第 7 講　PART3 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1**　$y=2x^4-3x^2+5x+6$

$y'=$ ア

① $4x^3-2x+5$　② $8x^3-6x+5$

③ $8x^3-6x+11$　④ $8x^4-6x^2+5x$

**2**　$y=-x^5+4x^3+x$

$y'=$ イ

① $5x^4+3x^2+1$　② $-5x^4+12x^2+x$

③ $-5x^4+12x^2+1$　④ $-5x^5+12x^3+x$

**3**　$y=(3x+1)(x^2-x+4)$

$y'=$ ウ

① $3x^2-6x+7$　② $9x^2-4x+11$

③ $9x^2+4x-11$　④ $9x^3-4x^2+11x$

**4**　$y=(x^2+1)(x^2+x-2)$

$y'=$ エ

① $4x^3-6x$　② $4x^3-3x^2+1$

③ $4x^3-3x^2+2x-1$　④ $4x^3+3x^2-2x+1$

# PART4 商の導関数，$x^n$ の導関数

## 要点整理と公式

### 要点 ① 商の微分法

導関数について，次の公式が成り立つ。

**導関数の公式**

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，$k$，$l$ を定数とすると

1 $\{kf(x)\}'=kf'(x)$ 2 $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3 $\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

4 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

5 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ とくに $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

（公式 5 の証明）

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから連続関数 よって $\displaystyle\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

したがって $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-g'(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)g(x)}=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(ex) 関数 $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$ を微分すると

$$y'=\frac{(3x)'(x^2+1)-3x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

## 要点② $x^n$ の導関数

$n$ が正の整数のとき $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ ……①　である。$n$ が負の整数においても①が成り立つことを示す。

$n$ が負の整数のとき，$n=-m$ とおくと，$m$ は正の整数であるから

$$\left(x^n\right)' = \left(x^{-m}\right)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{\qquad x^m}{x^m} = -\frac{\qquad x}{x^{2m}} = -mx \qquad\qquad = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

よって，①は $n$ が負の整数のときにも成り立つ。

また，$n=0$ のときは，$\left(x^0\right)' = (\quad)' = 0 = 0\cdot x^{0-1}$ であるから，①が成り立つ。

したがって，以下の公式が成り立つ。

### $x^n$ の導関数

$n$ が整数のとき　$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

(ex) 関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ を微分すると

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x\qquad\right)' = \qquad x \qquad = -\frac{2}{x^3}$$

**4** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x+3}$

(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^3}$

(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}$

# Point Pickup

**商の導関数**

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とくに $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

**$x^n$ の導関数**

$n$ が整数のとき $(x^n)'=nx^{n-1}$

# 第 7 講　PART4 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1**　$y=\dfrac{1}{3x+1}$

$y'=$ ア

① $-\dfrac{1}{3x+1}$　② $\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

③ $\dfrac{3}{(3x+1)^2}$　④ $-\dfrac{3}{(3x+1)^2}$

**2**　$y=\dfrac{x}{x^2+2}$

$y'=$ イ

① $\dfrac{-x}{x^2+2}$　② $\dfrac{-x^2}{(x^2+2)^2}$

③ $\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$　④ $\dfrac{-x^2+x+2}{(x^2+2)^2}$

**3**　$y=\dfrac{1}{x^4}$

$y'=$ ウ

① $-\dfrac{4}{x^3}$　② $\dfrac{1}{x^5}$

③ $-\dfrac{1}{x^5}$　④ $-\dfrac{4}{x^5}$

**4** $y=\dfrac{x^3-2x+3}{x^2}$

$y'=$ エ

① $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}$　　② $1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$

③ $1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}$　　④ $x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$

**[MEMO]**

# 第 8 講　合成関数の微分法，逆関数の微分法

# PART1 合成関数の微分法

## 要点整理と公式

### 要点 ① 合成関数の微分法

関数 $y=(x^2+x+1)^3$ は，2 つの関数 $y=u^3$，$u=x^2+x+1$ の合成関数とみることができる。合成関数について，次の公式が成り立つ。

**合成関数の微分法**

$y=f(u)$，$u=g(x)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は $x$ の関数として微分可能であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

（証明）

$u=g(x)$ において，$x$ の増分 $\Delta x$ に対する $u$ の増分を $\Delta u$

$y=f(u)$ において，$u$ の増分 $\Delta u$ に対する $y$ の増分を $\Delta y$ とすると

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで，$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であり，$u=g(x)$ は連続であることから，

$\Delta x\to 0$ のとき　$g(x+\Delta x)\to g(x)$　すなわち　$\Delta u\to$ 　　である。

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta\ \ \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(ex) $y=(x^2+x+1)^3$ の導関数について

$u=x^2+x+1$ とおくと，$y=u^3$

$$\frac{dy}{d\ \ }=3u^2,\quad \frac{d\ \ }{dx}=2x+1$$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\ \ }\cdot\dfrac{d\ \ }{dx}=3u^2\cdot(2x+1)=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$

$y=f(u)$，$u=g(x)$ のとき，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ であることから

合成関数の微分法の公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ は

$$\{f(g(x))\}'=f'(u)g'(x)= \qquad\qquad g'(x)$$

と表される。

(ex) $y=(x^2+x+1)^3$ について

$$y'= \qquad\qquad\qquad \cdot(x^2+x+1)'=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$$

**1** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x^2-x)^5$　　(2) $y=(1-3x^2)^4$　　(3) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

# Point Pickup

**合成関数の微分法**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

# 第 8 講　PART1 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1**　$y=(x^2-3x+4)^4$

$y'=$ ア

① $4(x^2-3x+4)^3$　② $4(x^2-3x+4)^3(2x-3)$

③ $4(x^2-3x+4)^4(2x-3)$　④ $4(x^2-3x+4)^3(x^2-3x)$

**2**　$y=(7-2x^3)^5$

$y'=$ イ

① $-6x(7-2x^3)^4$　② $-15x^2(7-2x^3)^4$

③ $-30x(7-2x^3)^4$　④ $-30x^2(7-2x^3)^4$

**3**　$y=\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$

$y'=$ ウ

① $-\dfrac{6}{(x^2+4)^4}$　② $-\dfrac{6x}{(x^2+4)^2}$

③ $\dfrac{6x}{(x^2+4)^4}$　④ $-\dfrac{6x}{(x^2+4)^4}$

# PART2 逆関数の微分法，$x^r$ の導関数

## 要点整理と公式

### 要点① 逆関数の微分法

微分可能な関数 $y=f(x)$ が逆関数 $y=f^{-1}(x)$ をもつとき

$$x=f(y)$$

両辺を $x$ で微分すると $1=\dfrac{d}{dx}f(y)$

ここで合成関数の微分法を用いると

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

よって $1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

したがって，次の公式が得られる。

**逆関数の微分法**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

(ex) $y=\sqrt{x}$ の導関数を，逆関数の微分法の公式を用いて求める。

$y=x^{\frac{1}{2}}$ より $x=$ 　　　　 $\dfrac{dx}{dy}=2y$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

### 要点② $x^r$ の導関数

$r$ が有理数のとき，$(x^r)'=rx^{r-1}$ が成り立つことを示す。

$r=\dfrac{m}{n}$ ($n$ は正の整数，$m$ は整数)とする。

$y=x^r$ すなわち $y=x^{\frac{m}{n}}$ のとき　$y^n=x^m$

両辺を $x$ で微分すると $\dfrac{d}{dx}y^n = mx^{m-1}$

ここで合成関数の微分法を用いると $\dfrac{d}{dx}y^n = \dfrac{d}{dy}y^n \cdot \dfrac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

よって $ny^{n-1} \cdot \dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = \frac{m}{n} \cdot x^{m-1-\left(m-\frac{m}{n}\right)} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

ゆえに $\left(x^r\right)' = rx^{r-1}$

**$x^r$ の導関数**

$r$ が有理数のとき　$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}$

(ex) $y = \sqrt{x}$ の導関数について

$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ より } y' = \quad x^{\frac{1}{2}} \quad = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**2** (1) 逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[3]{x}$ を微分せよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y=\sqrt[5]{x^2}$　　(ii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　(iii) $y=\sqrt{2x+3}$

# Point Pickup

**逆関数の微分法**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

**$x^r$ の微分法**

$r$ が有理数のとき $(x^r)'=rx^{r-1}$

# 第 8 講　PART2 確認問題

**1**　逆関数の微分法の公式を用いて, 関数 $y=\sqrt[5]{x}$ を微分せよ。

答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$ より，$x=$ **ア**

$\frac{dx}{dy}=$ **イ**

よって，$\frac{dy}{dx}=$ **ウ**

① $5y$　② $y^4$　③ $5y^4$

④ $y^5$　⑤ $\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$　⑥ $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

**2**　関数 $y=\sqrt[3]{x^4}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ **エ**

① $\sqrt[3]{x}$　② $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

③ $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$　④ $\frac{3}{4\sqrt[3]{x}}$

**3**　関数 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ **オ**

① $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$　② $-\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$

③ $\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$　④ $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

**4** 関数 $y=\sqrt{2x+5}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ カ

① $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$　② $\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}}$

③ $-\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}$

**[MEMO]**

# 第 9 講　三角・指数・対数関数の導関数，高次導関数

# PART1　三角関数の導関数

## 要点整理と公式

### 要点 ①　三角関数の導関数

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=\qquad$ であることを用いて，$y=\sin x$ の導関数を求める。

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}=\qquad\cdot\frac{\qquad}{1+\qquad}=\qquad$$ より

$$(\sin x)'=(\cos x)\cdot\qquad-\sin x\cdot\qquad=\cos x$$

したがって $(\sin x)'=\cos x$

次に，合成関数の微分法を用いて，$y=\cos x$ の導関数を求める。

$$(\cos x)'=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'=\qquad\qquad\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=-\sin x\cdot1=-\sin x$$

したがって $(\cos x)'=-\sin x$

さらに，商の微分法の公式を用いて，$y=\tan x$ の導関数を求める。

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\qquad\cos x-\sin x(\qquad)}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

したがって $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

以上より，次の公式が成り立つ。

**三角関数の導関数**

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(ex) $y=\sin^2 x$ の導関数について

$y=(\sin x)^2$ より

$y'=\quad\cdot\quad=$

$y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ より

$y'=-\dfrac{1}{2}\cdot\quad\cdot\quad=$

**1** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=\cos^3 x$

(3) $y=\dfrac{1}{\tan x}$

(4) $y=\sin x\cos x$

## Point Pickup

**三角関数の導関数**

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

# 第 9 講　PART1 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1**　$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$y'=$ ア

①　$-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　②　$2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

③　$-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　④　$-2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

**2**　$y=\sin^3 x$

$y'=$ イ

①　$3\sin^2 x$　　②　$3\cos^2 x$

③　$3\sin^2 x\cos x$　　④　$-3\sin^2 x\cos x$

**3**　$y=\dfrac{1}{\tan^2 x}$

$y'=$ ウ

①　$-\dfrac{1}{\tan x}$　　②　$-\dfrac{2}{\tan^3 x}$

③　$\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$　　④　$-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$

**4**　$y=\cos x+x\sin x$

$y'=$ エ

①　$x\sin x$　　②　$x\cos x$

③　$-x\cos x$　　④　$\sin x-x\cos x$

# PART2 対数関数の導関数

## 要点整理と公式

### 要点① 対数関数の導関数

対数関数 $y=\log_a x$ の導関数を求める。

$$(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h=xt$ であり，$h\to 0$ のとき $t\to 0$

$$(\log_a x)'=\lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

0 に近い $t$ の値について，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値を調べると，右の表のようになり，一定の値に近づくことが予想される。

| $t$ | $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ |
|---|---|
| 0.1 | $1.1^{10}=2.59374\cdots\cdots$ |
| 0.01 | $1.01^{100}=2.70481\cdots\cdots$ |
| 0.001 | $1.001^{1000}=2.71692\cdots\cdots$ |
| 0.0001 | $1.0001^{10000}=2.71814\cdots\cdots$ |
| 0.00001 | $1.00001^{100000}=2.71826\cdots\cdots$ |

実際に，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は極限値をもつことが知られていて，その極限値を「　」で表す。

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$e$ は無理数で，その値は $e=2.718281828\cdots\cdots$ であることが知られている。

この $e$ を用いると　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a$ 　　が成り立つ。

とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

$e$ を底とする対数 $\log_e x$ を，$x$ の「　　　　」という。自然対数 $\log_e x$ は，底 $e$ を省略して，「　　」と書くことが多い。このとき，底の変換公式を用いて

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}=\frac{1}{x\qquad}$$

と表される。とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$$(\log_e x)' = (\qquad)' = \frac{1}{\qquad} = \frac{1}{x}$$

以降，$\log x$ は自然対数を表すものとする。

**対数関数の導関数**

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$　　　$(\log_a x) = \dfrac{1}{x\log a}$

(ex) $y = \log 3x$ の導関数は

$$y' = \frac{1}{\qquad}\cdot(3x)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$y = \log_2(2x-1)$ の導関数は

$$y' = \frac{1}{\qquad\qquad}\cdot(2x-1)' = \frac{2}{(2x-1)\log 2}$$

## 要点 ② $y = \log|x|$ の導関数

関数 $y = \log|x|$ の導関数について

$x > 0$ のとき $y = \log|x| = \log x$ より $y' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$ のとき $y = \log|x| = \log(-x)$ より $y' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

以上より $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ。同様に $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$ が成り立つ。

一般に，次のことが成り立つ。

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(ex) $y = \log|3x+2|$ の導関数は

$$y' = \qquad\qquad = \frac{3}{3x+2}$$

**2** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(x^2-1)$

(2) $y=\log_3|2x|$

(3) $y=\log|\cos x|$

(4) $y=x\log x$

# Point Pickup

**対数関数の導関数**

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

一般に $\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ が成り立つ。

# 第 9 講 PART2 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $y=\log(x^2+1)$

$y'=$ ア

① $\dfrac{1}{x^2+1}$　② $-\dfrac{1}{x^2+1}$

③ $\dfrac{2x}{x^2+1}$　④ $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

**2** $y=\log_5|3x|$

$y'=$ イ

① $\dfrac{1}{x}$　② $\dfrac{1}{3x}$

③ $\dfrac{1}{x\log 3}$　④ $\dfrac{1}{x\log 5}$

**3** $y=\log|\sin x|$

$y'=$ ウ

① $\dfrac{1}{\sin x}$　② $\dfrac{1}{\cos x}$

③ $\dfrac{\cos x}{\sin x}$　④ $-\dfrac{\cos x}{\sin x}$

**4** $y=x^2\log x$

$y'=$ エ

① $2x\log x$　② $2x\log x+x$

③ $2x\log x+x^2$　④ $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)\log x$

# PART3 指数関数の導関数，対数微分法

## 要点整理と公式

### 要点① 指数関数の導関数

対数関数 $y=a^x$ の導関数を求める。

$y=a^x$ の両辺の自然対数をとると

$y=\quad a^x \qquad \log y=x\log a \qquad$ すなわち $\qquad \log y=(\log a)x$

両辺を $x$ で微分すると

$=\log a \qquad$ よって $\quad y'=y\log a$

したがって $(a^x)'=a^x\log a$

とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$(e^x)'=e^x\log e=e^x$

以上より，次のことが成り立つ。

**指数関数の導関数**

$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\log a$

(ex) $y=e^{2x}$ の導関数は

$y'=\quad\cdot(2x)'=2e^{2x}$

$y=3^{-2x}$ の導関数は

$y'=\qquad\cdot(-2x)'=(-2\log 3)\cdot 3^{-2x}$

### 要点② 対数微分法

関数を微分するとき，両辺の自然対数をとって微分を行う「　　　　　　」という方法がある。$y$ が $x$ の関数のとき

$\{\log|y|\}'=\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{y'}{y}$

であることを利用する。

(ex) 関数 $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$ の導関数を対数微分法によって求める。

両辺の　　　　の対数をとって

$$\log|y|=\log\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|$$

$$=\log|x-1|-3\log|x+1|$$

両辺を $x$ で微分すると

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{x+1-3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-2x+4}{(x-1)(x+1)}$$

したがって

$$y'=-\frac{2(x-2)}{(x-1)(x+1)}\cdot y=-\frac{2(x-2)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-1}{(x+1)^3}=-\frac{2(x-2)}{(x+1)^4}$$

対数微分法を用いることにより，$y=x^\alpha$（$\alpha$ が実数)の導関数を求めることができる。

$y=x^\alpha$ の両辺の自然対数をとると

$$\log y=\log x^\alpha \qquad \text{すなわち} \qquad \log y=\alpha\log x$$

両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}$$

したがって　$y'=\dfrac{\alpha}{x}\cdot y=\dfrac{\alpha}{x}\cdot x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$

以上より，次のことが成り立つ。

**$x^\alpha$ の導関数**

$\alpha$ が実数のとき　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

**3** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-x^2}$

(2) $y=x\cdot 3^x$

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(4) $y=x^{\log x}$

## Point Pickup

**指数関数の導関数**

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=a^x\log a$

**対数微分法**

積，商，累乗(べき乗)で表された関数の微分には，両辺の自然対数をとって微分を行う「対数微分法」が有効な場合がある。

# 第 9 講 PART3 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $y=e^{x^3}$

$y'=$ ア

① $e^{x^3}$　② $xe^{x^3}$

③ $x^2e^{x^3}$　④ $3x^2e^{x^3}$

**2** $y=x\cdot 2^x$

$y'=$ イ

① $(1+x)2^x$　② $x\cdot 2^x\log 2$

③ $(x+\log 2)\cdot 2^x$　④ $(1+x\log 2)\cdot 2^x$

**3** $y=\dfrac{e^x}{x^2}$

$y'=$ ウ

① $\dfrac{e^x-2x}{x^4}$　② $\dfrac{(x+1)e^x}{x^3}$

③ $\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$　④ $\dfrac{(x^2+1)e^x}{x^3}$

**4** $y=x^x \quad (x>0)$

$y'=$ エ

① $x^{x-1}$　② $x^x\cdot\log x$

③ $x^x(\log x+1)$　④ $x^x(\log x-1)$

# PART4 高次導関数

## 要点整理と公式

### 要点① 第 $n$ 次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x$ で微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の「　　　　　　　」といい，「　　　　」と表す。また，関数 $f(x)$ の第 2 次導関数は，

$f''(x)$ のほかにも $y''$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などの記号で表す。

また，$f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の「　　　　　　　」といい，「　　　　」

と表す。$f'''(x)$ のほかにも $y'''$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}$，$\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ などの記号で表す。

これに対し，$f'(x)$ を $f(x)$ の第 1 次導関数ということがある。

(ex) $y=x^3+2x^2+3x+4$ について

$y'=3x^2+4x+3$

$y''=6x+4$

$y'''=6$

一般に，関数 $y=f(x)$ を $n$ 回微分して得られる関数を，$y=f(x)$ の「　　　　　　　」

といい

　　　　，$f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$，$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$

などの記号で表す。$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ はそれぞれ $y'$，$y''$，$y'''$ を表す。

第 2 次以上の導関数を，高次導関数という。

(ex) $y=e^{2x-1}$ について

$y'=e^{2x-1}\cdot(2x-1)'=2e^{2x-1}$

$y''=2e^{2x-1}\cdot(2x-1)'=4e^{2x-1}$

$y'''=4e^{2x-1}\cdot(2x-1)'=8e^{2x-1}$

であり

$y^{(n)}=$

である。

## [MEMO]

**4** 次の関数の第 4 次までの導関数を求めよ。

(1) $y=\sin x$ (2) $y=e^{-x}$

## Point Pickup

**高次導関数**

関数 $y=f(x)$ を $n$ 回微分して得られる関数を，$y=f(x)$ の第 $n$ 次導関数という。
第 2 次以上の導関数を，高次導関数という。

# 第 9 講　PART4 確認問題

次の関数の第 4 次までの導関数を求めよ。

答えは下の①～⑥のうちから選べ。

**1** $y=\cos x$

$y'=$ ア

$y''=$ イ

$y'''=$ ウ

$y^{(4)}=$ エ

① $\sin x$　② $-\sin x$　③ $\cos x$

④ $-\cos x$　⑤ $\tan x$　⑥ $-\tan x$

**2** $y=e^{2x}$

$y'=$ オ

$y''=$ カ

$y'''=$ キ

$y^{(4)}=$ ク

① $e^{2x}$　② $2e^{2x}$　③ $4e^{2x}$

④ $6e^{2x}$　⑤ $8e^{2x}$　⑥ $16e^{2x}$

# 第10講　接線と法線の方程式

# PART1　接線と法線の方程式

## 要点整理と公式

### 要点 ①　接線と法線

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。よって，次のことが成り立つ。

**接線の方程式**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

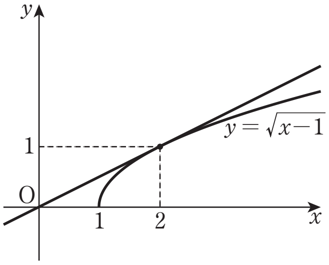
(ex) 曲線 $y=\sqrt{x-1}$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式

$f(x)=\sqrt{x-1}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \qquad f'(2)=\frac{1}{2}$$

よって，求める接線の方程式は

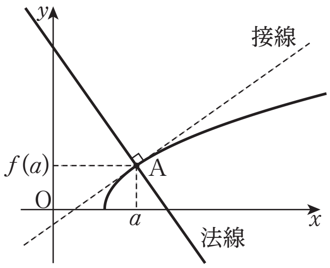
$$y\qquad=\qquad(x\qquad) \qquad \text{すなわち} \quad y=\frac{1}{2}x$$




曲線上の点 A を通り，A における接線と垂直に交わる直線を，点 A におけるこの曲線の「　　　」という。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の傾きは，$f'(a)\neq 0$ のとき　　　　　である。

よって，次のことが成り立つ。




**法線の方程式**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a)\neq 0$ のとき　　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

(ex) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{e}\right)$ における法線の方程式

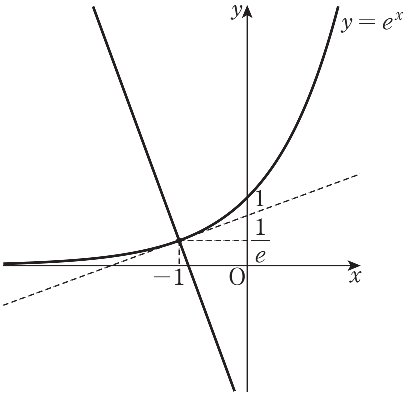
$f(x)=e^x$ とおくと

$$f'(x)=e^x \qquad f'(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

よって，求める法線の方程式は

$$y \qquad = \qquad (x \qquad )$$

すなわち　$y=-ex-e+\dfrac{1}{e}$




## 要点② 曲線外の 1 点から引いた接線の方程式

曲線外のある点 P から引いた接線を求めるときは，接点の $x$ 座標を $a$ などの文字でおき，接線の方程式を作り，その接線が点 P を通る，とするとよい。

(ex) 点 $(0,\ -1)$ から曲線 $y=\log x$ に引いた接線の方程式

$y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$

接点の座標を (　,　　　) とすると，接線の方程式は

$y \qquad = \quad (x \qquad)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$　……　①

①が点 $(0,\ -1)$ を通るので

$-1=\dfrac{1}{a}\cdot 0+\log a-1 \qquad \log a=0 \qquad$ よって　$a= \qquad =$

よって，求める接線の方程式は，①より

**1** (1) 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(i) $y=\dfrac{1}{x+2}$, A$(-1,\ 1)$　　(ii) $y=-\sqrt{2x+3}$, A$(0,\ -\sqrt{3})$

(iii) $y=\cos x$, A$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　(iv) $y=\log x$, A$\left(\dfrac{1}{e},\ -1\right)$

(2) 原点から曲線 $y=e^{2x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

## Point Pickup

**接線・法線の方程式**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における

接線の方程式　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$　（ただし $f'(a)\neq 0$）

# 第10講 PART1 確認問題

**1** 曲線 $y=\dfrac{8}{x}$ 上の点 (2, 4) における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ [ア]

法線 $y=$ [イ]

① $2x$　② $x+2$

③ $-2x+8$　④ $\dfrac{1}{2}x+3$

**2** 曲線 $y=\sqrt{x-3}$ 上の点 (4, 1) における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ [ウ]

法線 $y=$ [エ]

① $2x-7$　② $-2x+9$

③ $\dfrac{1}{2}x-1$　④ $\dfrac{1}{2}x+1$

**3** 曲線 $y=2\sin x$ 上の点 $\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \sqrt{3}\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ [オ]

法線 $y=$ [カ]

① $x-\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　② $-x+\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}\,x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\sqrt{3}$　④ $-\sqrt{3}\,x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\sqrt{3}$

**4** 曲線 $y=\log x$ 上の点 $(e,\ 1)$ における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ キ

法線 $y=$ ク

① $-ex$　② $\dfrac{1}{e}x$

③ $ex-e^2+1$　④ $-ex+e^2+1$

**5** 原点から曲線 $y=e^{-x}$ に引いた接線の方程式は $y=$ ケ である。答えは下の①～④のうちから選べ。

① $ex$　② $-ex$

③ $\dfrac{1}{e}x$　④ $-\dfrac{1}{e}x$

**[MEMO]**

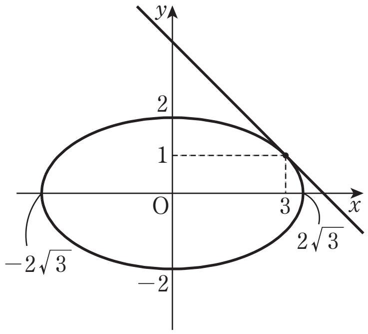
# PART2 いろいろな曲線の接線の方程式

## 要点整理と公式

### 要点 ① 曲線の方程式と接線

楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式は

$$\frac{3x}{12}+\frac{1\cdot y}{4}=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-x+4$$




である。この接線の方程式を，微分を用いて求める。

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について，$\dfrac{dy}{dx}$，すなわち $y'$ を求める。

合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{d}y^2\cdot\frac{d}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot y'$$

であるから，$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を　　　　　　　　すると

$$\frac{\quad}{12}+\frac{\quad}{4}\quad=\qquad\frac{y}{2}\cdot y'=-\frac{x}{6}$$

$y\neq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{x}{3y}$

よって，点 $(3,\ 1)$ における接線の傾きは $-\dfrac{3}{3\cdot 1}=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-1\cdot(x-3)+1 \quad \text{すなわち} \quad y=-x+4$$

### 要点 ② 媒介変数で表された曲線と接線

座標平面上の曲線が，媒介変数 $t$ により

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

の形で表されているとする。このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $t$ の関数で表す。

合成関数の微分により　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d}\cdot\dfrac{d}{dx}$　……　①

逆関数の微分により　$\dfrac{d}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d}}$　……　②

①，②より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

よって，次のことが成り立つ。

**曲線の媒介変数表示と導関数**

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(ex) 曲線 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin t \end{cases}$ において，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式

$\dfrac{dx}{d}=$ 　　　　，$\dfrac{dy}{d}=$ 　　　より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-2\sin 2t}=-\frac{\cos t}{2\sin 2t}$$

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos\dfrac{\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=-\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}$$

また，接点の座標は $\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\qquad \text{すなわち}\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

**2** (1) 双曲線 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=-1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式および法線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \end{cases}$ において，$t=-\frac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

## Point Pickup

**$F(x,\ y)=0$ で表される曲線の接線**

合成関数の微分を用いて両辺を$x$で微分することにより，$\frac{dy}{dx}$ を$x$，$y$を用いて表し，与えられた点の座標の値を代入することで，接線の傾きを求める。

**媒介変数で表される曲線の接線**

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

であることを用いて，接線の傾きを求める。

# 第10講 PART2 確認問題

**1** 双曲線 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(2,\ 3)$ における接線および法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ ア

法線 $y=$ イ

① $x+1$　② $2x-1$

③ $\frac{1}{2}x+2$　④ $-\frac{1}{2}x+4$

**2** 曲線 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ において，$t=\frac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

$y=$ ウ

① $\sqrt{3}\,x-1$　② $-\sqrt{3}\,x+5$

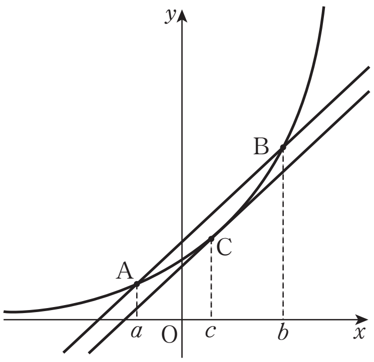
③ $2\sqrt{3}\,x-2$　④ $-2\sqrt{3}\,x+8$

# PART3 平均値の定理

## 要点整理と公式

### 要点 ① 平均値の定理

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に2点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとる。グラフがなめらかな曲線，つまり　　　　　であれば，2点 A，B の間の曲線上に，直線 AB と平行な接線が引ける点 C が存在する。



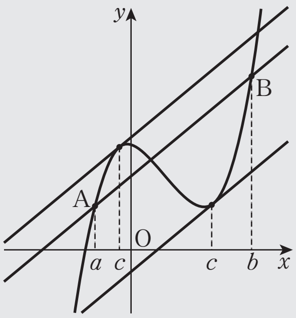

その接点 C の $x$ 座標を $c$ とすると，接線の傾きは　　　であり，直線 AB の傾きは $\dfrac{\quad-\quad}{\quad-\quad}$ であるから，次の定理が成り立つ。

**平均値の定理**

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が(少なくとも1つ)存在する。




(ex) 関数 $f(x)=x^2-1$ と区間 $[-2,\ 1]$ において，平均値の定理を満たす $c$ の値

$f(x)$ は区間 $(-2,\ 1)$ で微分可能

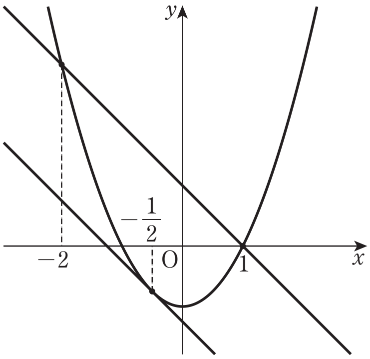
$$f'(x)=2x$$

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-3}{3}=-1$$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$$

を満たす $c$ の値は，$-1=2c$ より $c=-\dfrac{1}{2}$



## 要点 ② 平均値の定理の不等式への応用

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明する。

$a>0$ のとき $\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

$f(x)=$ 　　とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ a+1]$ で平均値の定理を用いると

$\dfrac{f(\quad)-f(\ )}{(\quad)-}=f'(c)$ …… ①，　$<c<$ 　　…… ②

を満たす実数 $c$ が存在する。

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，$f'(c)=\dfrac{1}{c}$ 　よって，①より $\log(a+1)-\log a=\dfrac{1}{c}$

また $a>0$ であるから，②の各辺の逆数をとることにより $\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$

したがって $\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

**3** (1) 次の関数 $f(x)$ と区間について，平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす $c$ の値を求めよ。

(i) $f(x)=x^3+2x$，$[-2,\ 1]$　　(ii) $y=\sqrt{x}$，$[4,\ 9]$

(2) 平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

## Point Pickup

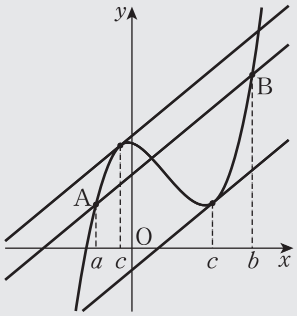
**平均値の定理**

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，

開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が(少なくとも1つ)存在する。



# 第10講 PART3 確認問題

**1** 関数 $f(x)=2x^2-3x+4$ と区間 $[-1,\ 2]$ について，

平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$

を満たす $c$ の値を求めよ。

$c=$ [ア]

答えは下の①～④のうちから選べ。

① $1$　② $\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{3}$　④ $-\dfrac{1}{2}$

**2** 関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ と区間 $[2,\ 10]$ について，

平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$

を満たす $c$ の値を求めよ。

$c=$ [イ]

**3** 次の ウ ～ ケ にあてはまるものを，下の選択肢より選べ。

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明する。

$0<a<b$ のとき，

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

[証明]

$f(x)=$ ウ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots①$$

$$a<c<b \quad \cdots\cdots②$$

を満たす実数 $c$ が存在する。

ここで，$f'(c)=$ オ であり，②より，

$$\boxed{\text{カ}}<\boxed{\text{オ}}<\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots③$$

であるから，①，③より，

$$\boxed{\text{ク}}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\boxed{\text{ケ}}$$

[ ウ ， エ の選択肢]

| | | |
|---|---|---|
| ① $x$ | ② $\frac{1}{x}$ | ③ $\log x$ |
| ④ $f'(x)$ | ⑤ $f(x)$ | ⑥ $f(c)$ |
| ⑦ $f'(c)$ | | |

[ オ ～ ケ の選択肢]

| | | |
|---|---|---|
| ① $a$ | ② $b$ | ③ $c$ |
| ④ $\frac{1}{a}$ | ⑤ $\frac{1}{b}$ | ⑥ $\frac{1}{c}$ |
| ⑦ $\log a$ | ⑧ $\log b$ | ⑨ $\log c$ |

**[MEMO]**

# 第11講　関数の増減

# PART1　関数の増加と減少

## 要点整理と公式

### 要点 ①　導関数の符号と関数の増加，減少

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする。このとき，関数 $f(x)$ の増加，減少について次のことが成り立つ。

**導関数の符号と関数の増減**

1　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加する

2　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少する

3　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数である

(1 の証明)

閉区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1$，$x_2 \leqq b$，$x_1<x_2$ を満たす任意の 2 つの値 $x_1$，$x_2$ をとると，平均値の定理により

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\quad x_1<c<x_2$$

を満たす実数 $c$ が存在する。

開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f'(c)>0$ であり，$x_2-x_1>0$ であるから

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \qquad \text{つまり} \qquad f(x_1)<f(x_2)$$

したがって，閉区間 $[a,\ b]$ に含まれる任意の 2 つの値 $x_1$，$x_2$ に対して

$$x_1<x_2 \qquad \text{ならば} \qquad f(x_1)<f(x_2)$$

が成り立つ。よって，1 が成り立つ。

2，3 についても同様に証明することができる。

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ の増減

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x$$

$f'(x)$　　　とすると $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\dfrac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $0$ | | $0$ | | |
| $f(x)$ | $1$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+\dfrac{1}{2}$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{1}{2}$ | | $\sqrt{3}\pi+1$ |

したがって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq 2\pi$ で増加し，$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ で減少する。

区間内に，$f'(c)=0$ となるような $x$ の値 $c$ があっても，その他の $x$ の値で

$f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は増加

$f'(x)<0$ ならば $f(x)$ は減少

する。

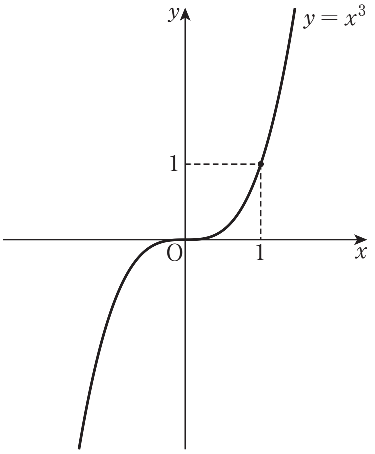
(ex) 関数 $f(x)=x^3$ の増減

$$f'(x)=3x^2$$

$x=0$ のとき $f'(x)=0$

$x\neq 0$ のとき $f'(x)>0$

したがって，$f(x)$ はつねに増加する。



**1** 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=\log x$　　(2) $f(x)=xe^{-x}$　　(3) $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

## Point Pickup

**関数の増減**

開区間 $(a,\ b)$ で常に

$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加

$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少

$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数

定義域に注意して，増減を調べる。

増減の区間には，区間の端を含む。

# 第11講 PART1 確認問題

**1** 関数 $f(x)=-\log 2x$ の増減を調べよ。[ア]

答えは下の①，②のうちから選べ。

① つねに増加する　　② つねに減少する

**2** 関数 $f(x)=(x-2)e^x$ の増減を調べよ。

ただし，[ウ]，[エ] は下の①，②のうちから選べ。

$x \leqq$ [イ] で [ウ]

[イ] $\leqq x$ で [エ]

① 増加する　　② 減少する

**3** 関数 $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x}$ において，

$$f'(x)=\frac{(x+\boxed{オ})(x-\boxed{カ})}{x^2}$$

であり，$f(x)$ は，

$x \leqq -$[キ]，[ク] $\leqq x$ で [ケ]

$-$[キ] $\leqq x < 0$，$0 < x \leqq$ [ク] で [コ]

[ケ]，[コ] は下の①，②のうちから選べ。

① 増加する　　② 減少する

# PART2 関数の極大・極小

## 要点整理と公式

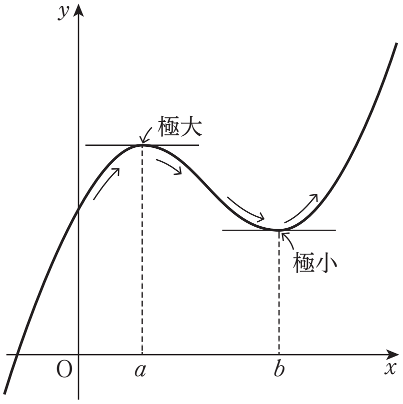
### 要点 ① 関数の極大と極小

関数 $f(x)$ を連続な関数とする。

　$f(x)$ が $x=a$ を境に増加から減少に移るとき，$f(x)$ は $x=a$ で「　　　」になるといい，$f(a)$ を「　　　　」という。

　$f(x)$ が $x=b$ を境に減少から増加に移るとき，$f(x)$ は $x=b$ で「　　　」になるといい，$f(b)$ を「　　　　」という。

　極大値と極小値をまとめて「　　　」という。




一般に，次のことが成り立つ。

**極値をとるための必要条件**

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$

$f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に

　　$f'(x)$ の値が　　から　　に変わるならば，$f(a)$ は

　　$f'(x)$ の値が　　から　　に変わるならば，$f(a)$ は

である。

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ の極値について

$$f'(x)=\frac{4(x^2+4)-4x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}=-\frac{4(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$(x^2+4)^2>0$ であるから，$f'(x)=0$ とすると $x=-2$，$2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

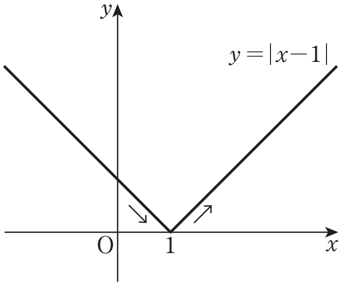
| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | $0$ | |
| $f(x)$ | | $-1$ | | $1$ | |

したがって，$f(x)$ は $x=2$ で極大値 $1$，$x=-2$ で極小値 $-1$ をとる。

$f'(a)=0$ であっても，$f(a)$ が極値であるとは限らない。例えば，関数 $f(x)=x^3$ は，$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないから，$x=0$ で極値をとらない。

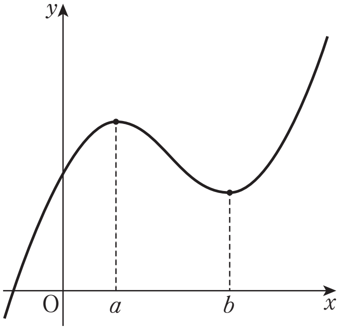
| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ではない場合にも，$f(a)$ が極値となる場合がある。例えば，$f(x)=|x-1|$ について，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能ではないが，$x=1$ を境に減少から増加に移るから，$f(1)$ は極小値である。




$x=a$ を含む十分小さい開区間における最大値，すなわち $x \neq a$ ならば $f(x)<f(a)$ が成り立つときの $f(a)$ の値が極大値である。

また，$x=b$ を含む十分小さい開区間における最小値，すなわち $x \neq b$ ならば $f(x)>f(b)$ が成り立つときの $f(b)$ の値が極小値である。



**2** 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=\cos 2x-2\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2) $f(x)=|x-1|\sqrt{x}$

## Point Pickup

**関数の極値**

$f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に

$f'(x)$ の値が 正 から 負 に変わるならば，$f(a)$ は 極大値

$f'(x)$ の値が 負 から 正 に変わるならば，$f(a)$ は 極小値　をとる。

$f'(x)=0$ となる $x$ の値の前後の範囲における $f'(x)$ の変化を調べる。定義域に注意。

※関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ではない場合にも，$f(a)$ が極値となる場合がある。

# 第11講 PART2 確認問題

**1** $0<x<2\pi$ において，関数 $f(x)=\sin^2 x+\cos x+1$ は，

$x=$ ア で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

$x=$ エ で極小値 オ

をとる。

ただし，ア，エ は下の①～⑥のうちから選べ。

① $\dfrac{\pi}{2}$　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{2}{3}\pi$

④ $\pi$　⑤ $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

**2** 関数 $f(x)=|x-6|\sqrt{x}$ は，

$x=$ カ で極大値 キ $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$

$x=$ ケ で極小値 コ

をとる。

# PART3 極値をもつための条件

## 要点整理と公式

### 要点 ① 関数が極値をもつための条件

関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Longrightarrow$

が成り立つ。つまり，$f'(a)=0$ であることは，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための

である。この条件のもとで，さらに $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わることで，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる，ということができる。

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{ax-6}{x^2+1}$ が $x=2$ で極値をとるような定数 $a$ の値について

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-(ax-6)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+12x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ は $x=2$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=2$ で極値をとるならば

よって $\dfrac{-3a+24}{25}=0$ より $a=8$

このとき

$$f(x)=\frac{8x-6}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}=-\frac{4(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | $0$ | |
| $f(x)$ | | $-8$ | | $2$ | |

したがって，確かに $f(x)$ は $x=2$ で極大値 2 をとる。

ゆえに，関数 $f(x)$ が $x=2$ で極値をとるような定数 $a$ の値は $a=8$

[MEMO]

**3** 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-7x+a}{x-2}$ が $x=3$ で極値をとるように，定数 $a$ の値を定めよ。

## Point Pickup

**関数が極値をもつための条件**

$x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための条件は

$f'(a)=0$　かつ　$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる

# 第11講　PART3 確認問題

**1**　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+a}{x-3}$ が $x=1$ で極値をとるような定数 $a$ の値を求めよ。

$$f'(x)=\frac{x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イウ}}-a}{(x-3)^2}$$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるならば，$f'\left(\boxed{\text{エ}}\right)=\boxed{\text{オ}}$ である。

よって，$a=\boxed{\text{カ}}$

逆に，このとき，

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)}{(x-3)^2}$$

であり，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\boxed{\text{クケ}}$ をとる。

ゆえに，求める $a$ の値は，$a=\boxed{\text{カ}}$

# PART4 関数の最大・最小

## 要点整理と公式

### 要点① 関数の最大・最小

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

関数の最大値，最小値は，関数の増減および極値を調べることにより，それらの極値と区間の端点における関数の値との大小を比較して求める。

(ex) 関数 $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$ の最大値・最小値について

この関数の定義域は　　　　　より $-3 \leqq x \leqq 3$

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$f'(x)=0$ とすると $\sqrt{9-x^2}=x$ ……　①

①の両辺を 2 乗すると

$$9-x^2=x^2 \qquad x^2=\frac{9}{2} \qquad ①より\ x \geqq 0\ なので\ x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ |
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | 極大 $3\sqrt{2}$ | ↘ | $3$ |

したがって，$f(x)$ は

$x=$　　　のとき　最大値

$x=$　　のとき　最小値

をとる。

[MEMO]

**4** 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(x)=-x+e^x\ (-2\leqq x\leqq 1)$　　(2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

## Point Pickup

**関数の最大・最小**

閉区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の最大・最小は，増減を調べ，
「極値」と「$f(a)$，$f(b)$（端点における関数の値）」を比較して決定する。

# 第11講 PART4 確認問題

**1** 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ は,

$x=$ [ア] のとき最大値 [イ]

$x=$ [ウ] のとき最小値 [エ]

をとる。

ただし, [イ], [エ] は下の①～④のうちから選べ。

① $0$ ② $e$

③ $\dfrac{e^2}{4}$ ④ $\dfrac{e^3}{9}$

**2** 関数 $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ は,

$x=$ [オ] のとき最大値 [カ]

$x=$ [キク] のとき最小値 [ケコ]

をとる。

# 第12講 関数のグラフ

# PART1 曲線の凹凸と変曲点

## 要点整理と公式

### 要点① 曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする。

$f''(x) > 0$

$\Longleftrightarrow$「　　　」が増加

$\Longleftrightarrow$ 曲線 $y = f(x)$ の「　　　　　　」が増加

$\Longleftrightarrow$ 曲線 $y = f(x)$ は「　　　」

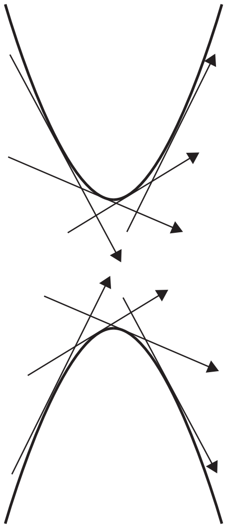
$f''(x) < 0$

$\Longleftrightarrow$「　　　」が減少

$\Longleftrightarrow$ 曲線 $y = f(x)$ の「　　　　　　」が減少

$\Longleftrightarrow$ 曲線 $y = f(x)$ は「　　　」

である。



**曲線の凹凸**

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(x) > 0$ となる区間では，曲線 $y = f(x)$ は下に凸

$f''(x) < 0$ となる区間では，曲線 $y = f(x)$ は上に凸

### 要点② 変曲点

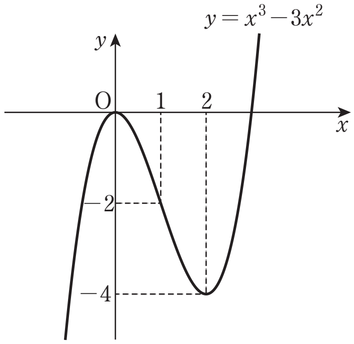
「　　　」… グラフの凹凸が入れ替わる曲線上の点

(ex) $f(x) = x^3 - 3x^2$ について

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | 0 | |
| $f(x)$ | に凸 | $-2$ | に凸 |



よって，点 $(1,\ -2)$ を境目に，グラフの凹凸が入れ替わっているので，点 $(1,\ -2)$ は変曲点である。変曲点について，以下のことが成り立つ。

**変曲点**

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(a)=0$ のとき，$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，

点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

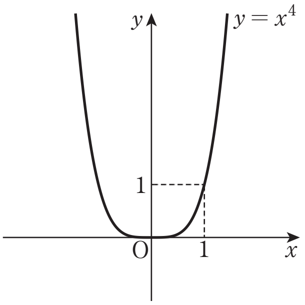
点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば，$f''(a)=0$ であるが，$f''(a)=0$ であっても点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点とは限らない。

$f(x)=x^4$ において

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2$

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | 下に凸 | $0$ | 下に凸 |




よって，$f''(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後で $f''(x)$ の符号は正のまま変わらない。

したがって，点 $(0,\ 0)$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点ではない。

**1** 次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^4+x^3$　　(2) $y=\log(x^2+1)$

## Point Pickup

**関数の凹凸と変曲点**

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f''(x)>0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$ となる区間では，曲線 $y=f(x)$ は上に凸

$f''(a)=0$　かつ　$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば

点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点　$\Longrightarrow$　$f''(a)=0$

# 第12講 PART1 確認問題

**1** 関数 $f(x)=x^4-2x^3+3$ において，曲線 $y=f(x)$ が

下に凸となる区間は，［ア］

上に凸となる区間は，［イ］

である。また，変曲点は2点 $($［ウ］, ［エ］$)$，

$($［オ］, ［カ］$)$ である。

ただし，［ウ］$<$［オ］とする。

［ア］，［イ］は下の①～④のうちから選べ。

① $0<x<1$　　② $0<x<2$

③ $x<0$，$1<x$　　④ $x<0$，$2<x$

**2** 関数 $f(x)=(x+2)\log x$ において，曲線 $y=f(x)$ が

下に凸となる区間は，［キ］

上に凸となる区間は，［ク］

である。また，変曲点は点 $($［ケ］, $f($［ケ］$))$ である。

［キ］，［ク］は下の①～④のうちから選べ。

① $0<x<1$　　② $0<x<2$

③ $1<x$　　④ $2<x$

# PART2 関数のグラフの概形

## 要点整理と公式

### 要点① 関数のグラフの概形と $x$ 軸に平行な漸近線

関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ のグラフの概形をかく。

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(-x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

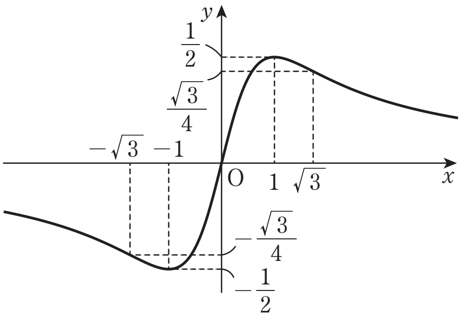
$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | | $-\dfrac{1}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | |

：下に凸で増加　：上に凸で増加　：下に凸で減少　：上に凸で減少

を表す。

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。




ここで

$$\lim_{x\to} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}$$

より，直線 $y=0$，すなわち $x$ 軸はこの曲線の漸近線である。

> **$x$ 軸に平行な漸近線**
>
> $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ が成り立つとき，
>
> 直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ は，$f(-x)=-f(x)$ を満たしているので，$y=f(x)$ のグラフは

原点に関して対称である。

## 要点② 関数のグラフの概形と様々な漸近線

関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ のグラフの概形をかく。

定義域は $x \neq -1$

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | ／ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-4$ | ↘ | ／ | ↘ | $0$ | ↗ |

ここで

$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=\quad$，$\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x)=$

より，直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

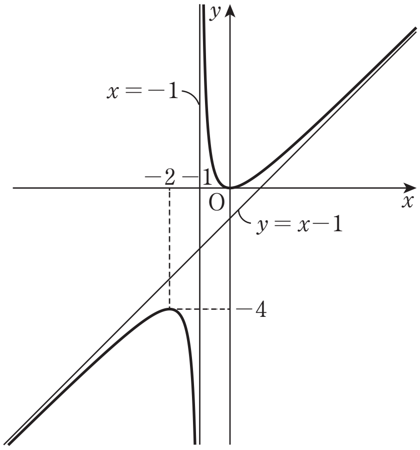
また

$\displaystyle\lim_{x\to}\{f(x)\qquad\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to}\{f(x)\qquad\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}$

より，直線 $y=x-1$ はこの曲線の漸近線である。

よって，グラフの概形は右図。




### $x$ 軸に垂直な漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ または $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ または

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ が成り立つとき，直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

### $x$ 軸に平行でも垂直でもない漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ が成り立つとき，

直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

**2** 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$  (2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

## Point Pickup

**関数のグラフの概形**

グラフの概形をかくときは，次のことに注目するとよい。

- ・定義域と値域
- ・関数の増減と極値
- ・凹凸と変曲点
- ・漸近線

他に，座標軸との共有点の座標や，対称性($x$ 軸対称，$y$ 軸対称，原点対称)に注目するとよい。

**曲線の漸近線**

$x$ 軸に平行な漸近線

$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$ ならば直線 $y=a$ は漸近線

$x$ 軸に垂直な漸近線

$\lim_{x\to a+0} f(x)$ または $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が $\infty$ または $-\infty$ ならば直線 $x=a$ は漸近線

$x$ 軸に平行でも垂直でもない漸近線

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ ならば

直線 $y=ax+b$ は漸近線

# 第12講 PART2 確認問題

**1** 関数 $f(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$ において，

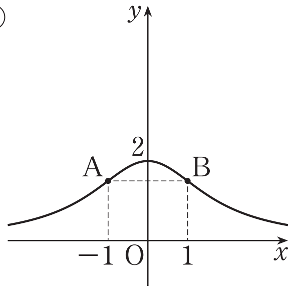
$$f''(x)=\frac{\boxed{アイ}\left(x^2-\boxed{ウ}\right)}{(x^2+3)^3}$$

また，$y=f(x)$ のグラフの概形は $\boxed{エ}$ である。

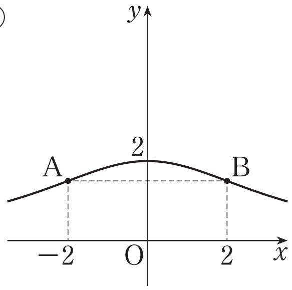
$\boxed{エ}$ は下の①～④のうちから選べ。

ただし，図の中の A，B は変曲点である。

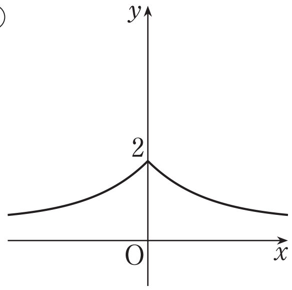
①



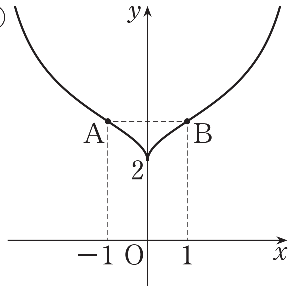

②




③




④



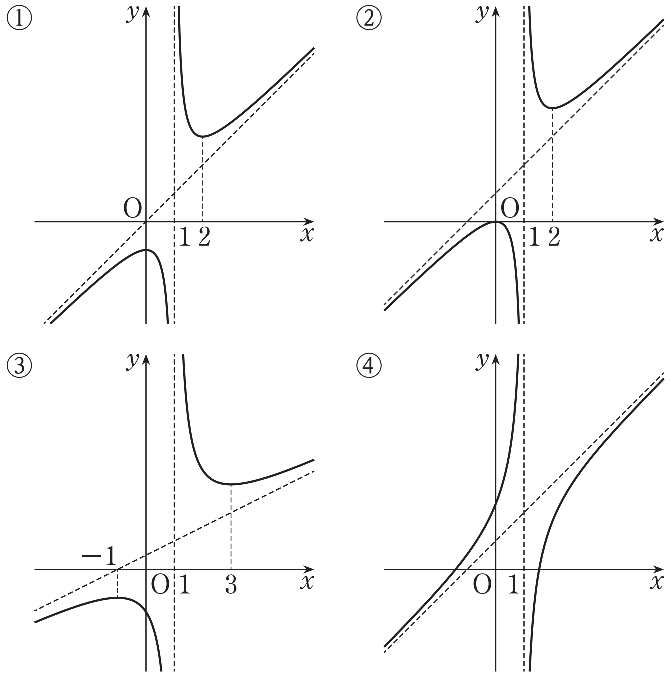
**2** 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ において，

$$f''(x)=\frac{\boxed{\text{オ}}}{(x-1)^3}$$

また，$y=f(x)$ の漸近線は，2 直線 $x=\boxed{\text{カ}}$，

$y=x+\boxed{\text{キ}}$ であり，グラフの概形は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ は下の①～④のうちから選べ。



# [MEMO]

# PART3 指数関数・対数関数のグラフの概形

## 要点整理と公式

### 要点 ① 指数関数・対数関数のグラフの概形

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることを用いて，関数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ のグラフの概形をかく。

$$f(x)=xe^{-x}$$

$$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot\left(-e^{-x}\right)=(x-2)\cdot e^{-x}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

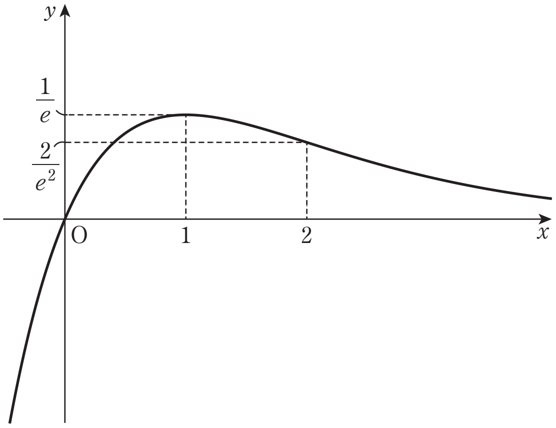
| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | $\dfrac{2}{e^2}$ | ↘ |

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ より，$x$ 軸はこの曲線の漸近線

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=$$

$f(0)=0$ より，$y$ 切片は $0$

よって，グラフの概形は右図



**[MEMO]**

**3** 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

## Point Pickup

**指数関数・対数関数のグラフの概形**

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ や $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ などの極限の情報が与えられている場合，これらを用いて $x\to\pm\infty$ のときの極限や漸近線を求めることで，グラフの概形がよりかきやすくなる。

# 第12講 PART3 確認問題

**1** 関数 $f(x)=xe^x$ において，

$$f''(x)=\left(x+\boxed{\text{ア}}\right)e^x$$

また，$y=f(x)$ のグラフの漸近線は $\boxed{\text{イ}}$ であり，グラフの概形は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

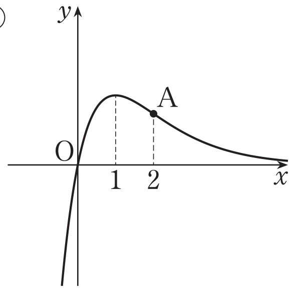
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ であることを用いてもよい。

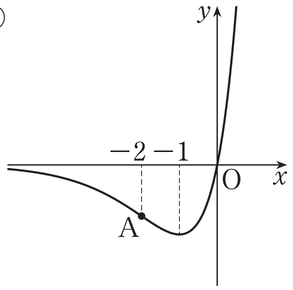
なお，図の中の A は変曲点である。

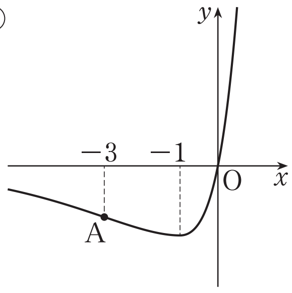
［$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢］

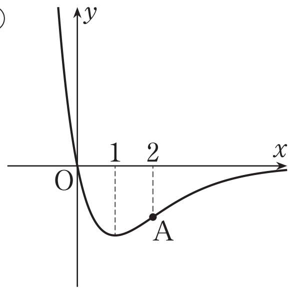
① $x$ 軸　　② $y$ 軸
③ 直線 $x=1$　　④ 直線 $y=1$

［$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢］

①



②



③



④


# PART4 第 2 次導関数と極値

## 要点整理と公式

### 要点 ① 第 2 次導関数と極大・極小

関数 $f(x)$ の極大・極小を判定するために，第 2 次導関数 $f''(x)$ の符号を調べる方法がある。

$f''(x)$ が連続な関数で，$f''(a)$　0 のとき，$x=a$ に十分近い $x$ においては $f''(x)$　0 であり，$f'(x)$ は　　する。
さらに，$f'(a)$　0 のとき，$f'(x)$ の符号は $x=a$ を境に　から　に変わる。
よって，$f(a)$ は　　　である。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f''(x)$ | | | |
| $f(x)$ | | | |

同様に，$f'(a)=0$，$f''(x)$　0 のとき，$f'(x)$ の符号は $x=a$ を境に　から　に変わり，$f(a)$ は　　　である。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | | | |

よって，次のことがいえる。

**第 2 次導関数と極値**

関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値

(ex) 関数 $f(x)=x^3-3x$ の極値

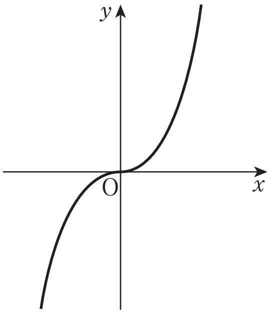
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，$f''(x)=6x$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1$，$1$

$f''(-1)=-6$　$0$，$f''(1)=6$　$0$

よって，極大値は $f(\quad)=2$　極小値は $f(\quad)=-2$

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ は極値である場合もあれば，極値でない場合もある。例えば，$f(x)=x^3$ のとき，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$ であり，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$ であるが，$f(0)$ は極値ではない。



**4** 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x)=-x^4+2x^2+5$

(2) $f(x)=x+2\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

# Point Pickup

**第 2 次導関数と極値**

関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値

一般に，これらの逆は成り立たない。

また，$f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ は極値となることも，極値にならないこともある。

# 第12講 PART4 確認問題

次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

**1** 関数 $f(x)=x^4-8x^2+7$ において，

$f'(x)=0$，$f''(x)>0$ を満たす $x$ の値は [ア]

$f'(x)=0$，$f''(x)<0$ を満たす $x$ の値は [イ]

である。

これより，極大値は [ウ]，極小値は [エオ] である。

[ア]，[イ] は下の①～④のうちから選べ。

① $0$　② $0,\ 1$

③ $\pm1$　④ $\pm2$

**2** 関数 $f(x)=x-2\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ において，

$f'([カ])=0$，$f''([カ])>0$

$f'([キ])=0$，$f''([キ])<0$

となる。

これより，極大値は [ク]，極小値は [ケ] である。

[カ] ～ [ケ] は下の①～④のうちから選べ。

[[カ]，[キ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$　② $\dfrac{\pi}{6}$

③ $\dfrac{5}{3}\pi$　④ $\dfrac{11}{6}\pi$

[[ク]，[ケ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$　② $\dfrac{\pi}{6}-1$

③ $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$　④ $\dfrac{5}{6}\pi+1$

# 第13講　方程式・不等式への応用

# PART1 不等式の証明

## 要点整理と公式

### 要点① $f(x)>g(x)$ の証明①

$f(x)>g(x) \iff f(x)-g(x)>0$ であるから，$F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

不等式 $f(x)>g(x)$ を示すことは，$F(x)>0$ を示すことと同義である。

ここでは，関数 $F(x)$ の増減を調べることで，$F(x)>0$ を証明する。

(ex) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示す。

$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと $f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき $e^x>1$ であるから $f'(x)$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に　　する。

また，$f(0)=e^0-1=$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $e^x>1+x$

| $x$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | |
| $f(x)$ | | |

$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ が成り立つことを示す。

$g(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおくと $g'(x)=e^x-(1+x)=f(x)$

$x>0$ のとき $f(x)>0$ であるから $g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$g(0)=e^0-1=0$

したがって，$x>0$ のとき $g(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

したがって，$x>0$ のとき $e^x>\dfrac{1}{2}x^2$　すなわち $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{1}{2}x$ が成り立つ。

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}x=\infty$ より $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ が成り立つ。

また，$e^x>\frac{1}{2}x^2$ より $0<\frac{x}{e^x}<\frac{2}{x}$ が成り立つ。

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ より $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ が成り立つ。

※一般に，$n$ が自然数のとき，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

## 要点② $f(x)>g(x)$ の証明②

ここでは $f(x)>g(x)$ を示すために，$F(x)=f(x)-g(x)$ とおき，$F(x)$ の増減を調べて，( $F(x)$ の最小値 ) $>0$ を示すことで，$F(x)>0$ を証明する。

(ex) $x>0$ のとき，不等式 $x\log x\geqq x-1$ が成り立つことを示す。

$f(x)=x\log x-(x-1)$ とおくと $f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\log x$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ／ | ↘ | 極小 | ↗ |

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)=1\cdot\log 1-(1-1)=0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$

ゆえに，$x>0$ のとき $x\log x\geqq x-1$

**1** (1) 次の不等式を証明せよ。

(i) $x>0$ のとき $\cos x>-x+1$  (ii) $x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2) $x>0$ のとき不等式 $\log x<2\sqrt{x}$ を証明せよ。

# Point Pickup

**不等式 $f(x)>g(x)$ の証明**

$F(x)=f(x)-g(x)$ とおき，$F(x)>0$ であることを以下のように示す。

① $F(x)$ が単調増加かつ $F(a)\geqq 0$ $\Longrightarrow$ $x>a$ のとき $F(x)>0$

② （区間内における $F(x)$ の最小値）$>0$

# 第13講 PART1 確認問題

**1** $0<x<2\pi$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$x>\sin x$$

ただし，［ア］～［ウ］は下の選択肢のうちから選べ。

〔証明〕

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=［ア］$$

$0<x<2\pi$ のとき，$f'(x)$［イ］$0$

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に［ウ］する。

また，$f(0)=$［エ］であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$f(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$x>\sin x$$

[［ア］の選択肢]

① $-\cos x$　② $1+\cos x$

③ $1-\cos x$　④ $1-\sin x$

[［イ］の選択肢]

① $>$　② $<$　③ $=$

[［ウ］の選択肢]

① 増加　② 減少

**2** $0<x<2\pi$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

ただし，[オ]～[キ] は下の選択肢のうちから選べ。

また，**1** の結果 $x>\sin x$ ……(＊)を用いてもよい。

〔証明〕

$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\boxed{\text{オ}}$$

(＊)より，$0<x<2\pi$ のとき，$g'(x)$ [カ] $0$

よって，$g(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に [キ] する。

また，$g(0)=$ [ク] であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$g(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

[ [オ] の選択肢 ]

① $\sin x+x$　② $\sin x-x$

③ $x-\sin x$　④ $x-\cos x$

[ [カ] の選択肢 ]

① $>$　② $<$　③ $=$

[ [キ] の選択肢 ]

① 増加　② 減少

**3** $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\log x < x$$

ただし，[ケ] は下の①～④のうちから選べ。

〔証明〕

$h(x)=x-\log x$ とおくと，

$$h'(x)= \boxed{ケ}$$

$x>0$ において $h(x)$ は $x=$ [コ] で最小値 [サ] をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$h(x)>0$

すなわち，$x>0$ のとき，$\log x < x$

[ [ケ] の選択肢 ]

① $\dfrac{1}{x}$　　② $x(x-1)$

③ $\dfrac{x+1}{x}$　　④ $\dfrac{x-1}{x}$

# PART2 方程式の実数解の個数

## 要点整理と公式

### 要点 ① 方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点の個数である。このことを利用して，$y=f(x)$ のグラフの概形をかき，共有点の個数を考え，実数解の個数を求める。

(ex) 方程式 $e^x=x+2$ の異なる実数解の個数

$f(x)=e^x-x-2$ とおくと $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ |

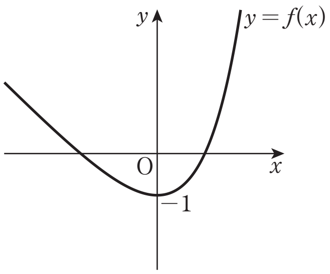
また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-x-2)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x-2)$

$$=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=\infty$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。

よって，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点の個数は 2 個であることから，求める方程式の実数解の個数は 2 個である。




### 要点 ② 定数分離

$a$ を定数とするとき，方程式 $\log x=ax$ の異なる実数解の個数を求める。

真数条件より $x>0$

よって $\log x=ax \iff \dfrac{\log x}{x}=a$

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると $x=e$

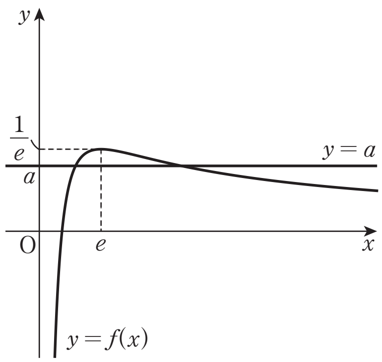
よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ／ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ |

また $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x} =$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。




$y=f(x)$ と直線 $y=a$ のグラフの共有点の個数が求める方程式の実数解の個数であることから

$0<a<\frac{1}{e}$ のとき 2 個

$a=\frac{1}{e}$，$a \leqq 0$ のとき 1 個

$a>\frac{1}{e}$ のとき 0 個

**2** (1) 方程式 $x=\cos x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) $a$ を定数とする。方程式 $e^x=ax$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ であることを用いてもよい。

# Point Pickup

**方程式の実数解の個数と定数分離**

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数 $\iff$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点の個数

$y=f(x)$ のグラフの概形をかき，共有点の個数を考える。

とくに，$f(x)$ に含まれる文字定数(文字係数)$a$ が 1 次式の場合は，変数 $x$ と定数 $a$ を分離して，$\boxed{\phantom{xxxx}}=a$ の形に変形させることにより，$\boxed{\phantom{xxxx}}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を考える方法が有効である。

# 第13講 PART2 確認問題

**1** $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x = 2x-1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

ただし，[ア] ～ [ウ] は下の選択肢のうちから選べ。

$f(x)=\sin x-(2x-1)$ とおいて，$f'(x)$ を調べると，

$f(x)$ は単調に [ア] することがわかる。

また，$f(0)$ [イ] $0$，$f(2\pi)$ [ウ] $0$ であるから，

$y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフと $x$ 軸との共有点の個数は

[エ] 個である。

よって，方程式の実数解の個数は，[オ] 個

[ [ア] の選択肢 ]

① 増加　　② 減少

[ [イ], [ウ] の選択肢 ]

① ＞　　② ＜　　③ ＝

**2** $a$ を定数とする。方程式 $ae^{-x}=x-1$ の異なる実数解の個数を調べよ。

ただし，$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ であることを用いてもよい。

[カ]，[キ] は下の①～④のうちから選べ。

$ae^{-x}=x-1$ を変形すると，

[カ] $=a$

$f(x)=$ [カ] とおいて，$f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフと直線 [キ] の共有点の個数を求める。

この結果，方程式 $ae^{-x}=x-1$ の実数解の個数は次のようになる。

[クケ] $<a<$ [コ] のとき，　2 個

$a=$ [クケ]，$a\geqq$ [コ] のとき，1 個

$a<$ [クケ] のとき，　0 個

[ [カ] の選択肢 ]

① $(x-1)e^x$　② $(x-1)e^{-x}$

③ $x-1-e^{-x}$　④ $e^x-x+1$

[ [キ] の選択肢 ]

① $y=0$　② $y=a$

③ $x=a$　④ $y=x-1$

**[MEMO]**

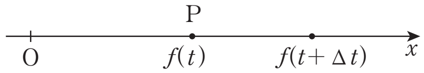
# 第14講　速度と加速度，関数の近似式

# PART1 直線上の点の運動

## 要点整理と公式

### 要点① 直線上の点の運動

数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が，時刻 $t$ の関数として $x=f(t)$ と表されるとき，時刻 $t$ から $t+\Delta t$ までの平均速度は




$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

と表される。この平均速度において，$\Delta t\to 0$ のときの極限値を，時刻 $t$ における点Pの「　　　」という。点Pの速度を $v$ とすると

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

と表される。$v>0$ のときは，点Pは正の向きに移動し，$v<0$ のときは，点Pは負の向きに移動する。

速度 $v$ の絶対値 $|v|$ を，点Pの「　　　」という。

さらに，速度 $v$ の時刻 $t$ における変化率を，点Pの「　　　　」という。点Pの加速度を $\alpha$ とすると

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

と表される。加速度 $\alpha$ の絶対値 $|\alpha|$ を，点Pの「加速度の大きさ」という。

**速度と加速度**

数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が $x=f(t)$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの

速度は $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　加速度は $\alpha=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$

(ex) 数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=t^3-3t^2+4$$

と表されるとき，点Pの時刻 $t$ における速度 $v$ と加速度 $\alpha$ は

$$v=\frac{d}{d}=3t^2-6t \qquad \alpha=\frac{d}{d}=6t-6$$

**[MEMO]**

**1** (1) $A$, $\omega$ を定数とする。数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が，時刻 $t$ の関数として $x = A\sin\omega t$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速度 $v$，加速度 $\alpha$ を求めよ。

(2) 地上から，初速度 $v_0$ でボールを真上に投げ上げたときの $t$ 秒後の高さ $y$ は $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ （$g$ は定数）と表される。$t$ 秒後におけるボールの速度 $v$ と加速度 $\alpha$ を求めよ。

## Point Pickup

**速度と加速度**

数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が $x = f(t)$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$　　加速度 $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$

# 第14講 PART1 確認問題

**1** 数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が，時刻 $t$ の関数として $x=3\sin 2t$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速度 $v$，加速度 $\alpha$ は，

$v=$ [ア]，$\alpha=$ [イ]

である。[ア]，[イ] は下の①～⑥のうちから選べ。

| | |
|---|---|
| ① $6\sin 2t$ | ② $6\cos 2t$ |
| ③ $-6\cos 2t$ | ④ $12\sin 2t$ |
| ⑤ $-12\sin 2t$ | ⑥ $-12\cos 2t$ |

**2** 地上から，初速度 $10\,(\mathrm{m/s})$ でボールを真上に投げ上げたときの $t$ 秒後の高さ $y\,(\mathrm{m})$ は，$y=10t-\dfrac{1}{2}gt^2$（$g$ は定数）と表される。

$t$ 秒後におけるボールの速度 $v\,(\mathrm{m/s})$ と加速度 $\alpha\,(\mathrm{m/s^2})$ は，

$v=$ [ウ]，$\alpha=$ [エ]

である。[ウ]，[エ] は下の①～⑥のうちから選べ。

| | |
|---|---|
| ① $g$ | ② $-g$ |
| ③ $\dfrac{1}{2}g$ | ④ $10-gt$ |
| ⑤ $10-\dfrac{1}{2}gt$ | ⑥ $10t-\dfrac{1}{2}gt^2$ |

# PART2 平面上の点の運動

## 要点整理と公式

### 要点 ① 平面上の点の運動

座標平面上を運動する点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。$x$，$y$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

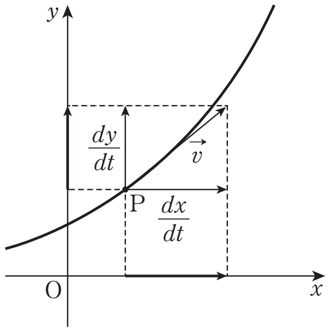
と表されるとき，座標 $x$，$y$ の時刻 $t$ における微分係数

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

を，それぞれ点Pの $x$ 軸方向の速度，$y$ 軸方向の速度

といい，これらの組

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$




を，時刻 $t$ における点Pの「　　　」または「　　　　　　　」といい，　と表す。また，

速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ を，時刻 $t$ における点Pの「　　　」という。

さらに，$x$ 軸方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ と $y$ 軸方向の加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$ の組

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を，時刻 $t$ における点Pの「　　　」または「　　　　　　　」といい，　と表す。また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ である。

**速度と加速度**

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ の，時刻 $t$ における $x$ 座標，$y$ 座標が $t$ の関数であるとき，点Pの時刻 $t$ における

速度 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

(ex) 時刻 $t$ における点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=2t$，$y=2t^2-t+1$ で表されるとき，

$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=4t-1$ より，時刻 $t$ における点Pの

速度 $\vec{v}=(2,\ 4t-1)$　　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{(2)^2+(4t-1)^2}=\sqrt{16t^2-8t+5}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=4$ より，時刻 $t$ における点Pの

加速度 $\vec{\alpha}=(0,\ 4)$　　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(0)^2+4^2}=4$

## 要点② 等速円運動

座標平面上を運動する点Pの時刻 $t$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t$$

で表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速さ，加速度の大きさを求める。

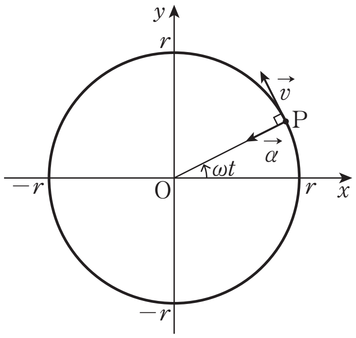
$\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$，$\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$ より，速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}=\sqrt{r^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}=r\omega$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$ より，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(-r\omega^2\cos\omega t\right)^2+\left(-r\omega^2\sin\omega t\right)^2}=\sqrt{r^2\omega^4\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)}=r\omega^2$$

点Pは，円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を動き，その速さは $r\omega$ で　　　である。このように，円周上を運動する点Pの速さが一定であるとき，点Pの運動を「　　　」といい，$\omega$ を角速度という。




一般に，等速円運動する点Pの加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは点Pから円の中心に向かう向きである。また，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は，速度ベクトル $\vec{v}$ と垂直である。

**2** 時刻 $t$ における点Pの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，点Pの時刻 $t$ における速度，速さ，加速度，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=e^t+e^{-t}$，$y=e^t-e^{-t}$

(2) $x=2\cos\dfrac{\pi}{3}t$，$y=2\sin\dfrac{\pi}{3}t$

## Point Pickup

**速度と加速度**

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として表されているとき

速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$　　速さ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$　　加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

# 第14講 PART2 確認問題

**1** 時刻 $t$ における点Pの座標 $(x,\ y)$ が

$$x=2t-1,\quad y=t^2-t$$

で与えられる。このとき，時刻 $t$ における点Pの速さは

$\sqrt{\boxed{ア}t^2-\boxed{イ}t+\boxed{ウ}}$ である。また，時刻 $t$ における

点Pの加速度は $\vec{\alpha}=\left(\boxed{エ},\ \boxed{オ}\right)$，加速度の大きさは

$\boxed{カ}$ である。

**2** 時刻 $t$ における点Pの座標 $(x,\ y)$ が

$$x=2\cos 3t,\quad y=2\sin 3t$$

で与えられる。このとき，点Pの速さは $\boxed{キ}$ であり，

加速度は $\vec{\alpha}=\boxed{ク}$，加速度の大きさは $\boxed{ケコ}$ である。

$\boxed{ク}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t)$
② $(18\sin 3t,\ 18\cos 3t)$
③ $(18\cos 3t,\ 18\sin 3t)$
④ $(-18\cos 3t,\ -18\sin 3t)$

# PART3 関数の近似式

## 要点整理と公式

### 要点① 1次の近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，

微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

よって，$h$ が 0 に十分近い値のときは

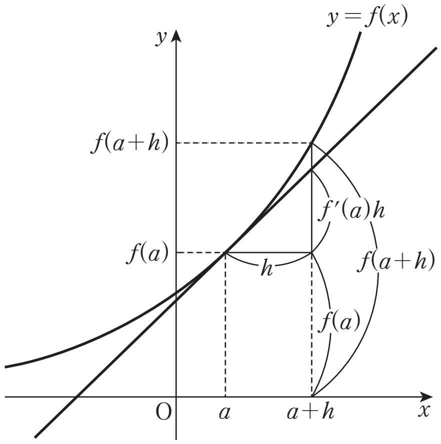
$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

であるから

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq f'(a)h$$

つまり

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$




と表すことができる。これは，$f(a+h)$ の値が $h$ の1次式で近似されることを表す。

**1次の近似式**

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

(ex) $h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の1次の近似式

$(\sin x)'=\cos x$ より

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$\sin(a+h)\fallingdotseq$ 　　$+$ 　　　$=\sin a+h\cos a$

1次の近似式 $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$ において，$a=0$，$h=x$ とすると，次の近似式が得られる。

**$x\fallingdotseq 0$ のときの1次の近似式**

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

(ex) $x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)=(1+x)^p$（$p$ は実数）の1次の近似式

$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$ であり，$f(0)=1$，$f'(0)=p$ であるから

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$

**[MEMO]**

**3** (1) $h \fallingdotseq 0$ のとき，$\cos(a+h)$ の 1 次の近似式をつくり，$\cos 46^\circ$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。ただし，$\pi = 3.142$，$\sqrt{2} = 1.414$ とする。

(2) 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

(i) $\dfrac{1}{0.998^2}$　　(ii) $\sqrt[3]{346}$

## Point Pickup

**1 次の近似式**

$h \fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$

$x \fallingdotseq 0$ のとき　$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$

とくに　$x \fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p \fallingdotseq 1 + px$

# 第14講 PART3 確認問題

**1** $h \fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式をつくり，

$\sin 61^\circ$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

ただし，$\sqrt{3}=1.732$，$\dfrac{\pi}{180}=0.0174$ とする。

［ア］，［イ］は下の①～④のうちから選べ。

1 次の近似式 ［ア］

$\sin 61^\circ$ の近似値 ［イ］

[［ア］の選択肢]

① $\sin a+h\cos a$　　② $\sin a-h\cos a$

③ $\cos a+h\sin a$　　④ $\cos a-h\sin a$

[［イ］の選択肢]

① 0.724　　② 0.785

③ 0.825　　④ 0.875

**2** 1 次の近似式を用いて，$1.002^5$ の近似値を求める。

$f(x)=(1+x)^5$ とおくと，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \boxed{ウ}+\boxed{エ}x$$

したがって，$1.002^5$ の近似値を小数第 2 位まで求めると

［オ］である。

［オ］は下の①～④のうちから選べ。

① 1.01　　② 1.02

③ 1.03　　④ 1.04

**3** 1 次の近似式を用いて，$\sqrt[3]{128}$ の近似値を求める。

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \boxed{\text{カ}} + \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}x$$

したがって，$\sqrt[3]{128}$ の近似値を小数第 2 位まで求めると

$\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① 5.03　　② 5.04

③ 5.05　　④ 5.06

**[MEMO]**

# 第 15 講　不定積分

# PART1　不定積分の計算

## 要点整理と公式

### 要点 ①　不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，関数 $f(x)$ の「　　　　　」という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数，すなわち

$$F'(x)=f(x)$$

が成り立つとき，任意の定数 $C$ に対して

$$\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$$

が成り立ち，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。つまり，関数 $f(x)$ の原始関数は無数にある。

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数は定数 $C$ を用いて

$$F(x)+C$$

で表される。この原始関数をまとめて $f(x)$ の「　　　　　」といい，記号　　　　　で表す。すなわち

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

である。このとき，$f(x)$ を「　　　　　」，$x$ を「　　　　　」，$C$ を「　　　　　」という。また，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を「 積分する 」という。以下，不定積分を求める際に，$C$ は積分定数を表すこととする。

### 要点 ②　$x^{\alpha}$ の不定積分

不定積分は，これまで学んできた導関数の公式の逆を利用して求めることができる。

実数 $\alpha$ について

$$\left(x^{\alpha+1}\right)'=$$

が成り立つ。また

$$(\log|x|)'=$$

が成り立つ。よって，次の公式が得られる。

### $x^{\alpha}$ の不定積分

$\alpha \neq -1$ のとき　$\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

$\alpha = -1$ のとき　$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|+C$

(ex) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C = \frac{1}{\quad}x^{\quad}+C = -\frac{1}{2x^2}+C$

$\displaystyle\int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}t^{\frac{1}{3}+1}+C = \frac{1}{\quad}t^{\quad}+C = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}+C$

※ $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$ は $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ と書くことがある。同様に $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,dx$ は $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

## 要点③ 不定積分の基本性質

不定積分について，次の公式が成り立つ。

### 不定積分の基本性質

① $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$　($k$ は定数)

② $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

③ $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

(ex) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{x^2}\,dx$

$\displaystyle= \int \left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle= \int dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2}\,dx$

$= x-2\qquad\qquad +C$

※ $\displaystyle\int 1dx$ は $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

**1** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x}dx$

## Point Pickup

**$x^\alpha$ の不定積分**

$\alpha \neq -1$ のとき $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

$\alpha = -1$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$

積分定数は $C$ 以外の文字を用いることもある。

**不定積分の基本性質**

① $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　（$k$ は定数）

② $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

③ $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

# 第15講 PART1 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}dx=$ ア $+C$

① $-\dfrac{1}{x^2}$　② $-\dfrac{2}{x^2}$

③ $-\dfrac{1}{2x^2}$　④ $-\dfrac{1}{2x^4}$

**2** $\displaystyle\int \sqrt{t}\,dt=$ イ $+C$

① $\dfrac{1}{2}\sqrt{t}$　② $t\sqrt{t}$

③ $\dfrac{3}{2}t\sqrt{t}$　④ $\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}$

**3** $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx=$ ウ $+C$

① $x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$　② $\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}$

③ $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}$　④ $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-4\sqrt{x}$

**4** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}dx=$ エ $+C$

① $\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}$　② $2\sqrt[3]{x}-\log|x|$

③ $3\sqrt[3]{x}-\log|x|$　④ $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}-\log|x|$

# PART2 三角関数・指数関数の不定積分

## 要点整理と公式

### 要点 ① 三角関数の不定積分

$(\sin x)' =$ 　　　　$(\cos x)' =$

$(\tan x)' =$ 　　　　$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

であるから，次の公式が得られる。

**三角関数の不定積分**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

(ex) $\int (3\sin x + 4\cos x) dx =$ 　　　$+$ 　　　$+C$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx = \int \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = 2x - \qquad + C$$

### 要点 ② 指数関数の不定積分

$(e^x)' =$ 　　　　$(a^x)' =$

であるから，次の公式が得られる。

**指数関数の不定積分**

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

(ex) $\int (e^x + 3^x) dx =$ 　$+$ 　　$+C$

# [MEMO]

**2** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x dx$

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx$

(4) $\displaystyle\int(5e^x-2^x\log 2)dx$

# Point Pickup

**三角・指数関数の不定積分**

$$\int\sin x dx=-\cos x+C \qquad \int\cos x dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C \qquad \int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

# 第15講　PART2 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int(\sin x+3\cos x)dx=$ ア $+C$

① $\sin x-3\cos x$　② $-\sin x+3\cos x$

③ $\cos x-3\sin x$　④ $-\cos x+3\sin x$

**2** $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx=$ イ $+C$

① $\sin x-\cos x$　② $\sin x+\tan x$

③ $\sin x-\tan x$　④ $\cos x+\tan x$

**3** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x\tan x}=$ ウ $+C$

① $\tan x$　② $\dfrac{1}{\tan x}$

③ $-\dfrac{1}{\tan x}$　④ $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

**4** $\displaystyle\int(3e^x+3^x)dx=$ エ $+C$

① $e^x+3^x$　② $3e^x+3^x$

③ $3e^x+3^x\log 3$　④ $3e^x+\dfrac{3^x}{\log 3}$

# PART3 $f(ax+b)$ の不定積分

## 要点整理と公式

### 要点 ① $f(ax+b)$ の不定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とする。このとき，$a$，$b$ を定数とすると，合成関数の微分法により

$$\{F(ax+b)\}' = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

である。よって，次の公式が得られる。

**$f(ax+b)$ の不定積分**

$F'(x)=f(x)$，$a \neq 0$ のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

(ex) $\displaystyle\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(2x+1)^4+C = \frac{1}{8}(2x+1)^4+C$

$$\int \cos 5\theta d\theta = \frac{1}{5}\sin 5\theta + C$$

$$\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}e^{3x-2}+C$$

**[MEMO]**

**3** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta$

(4) $\displaystyle\int(e^{-2x}+3^{4x-3})dx$

## Point Pickup

**$f(ax+b)$ の不定積分**

$F'(x)=f(x)$，$a\neq 0$ のとき

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

$ax+b$ を1つのかたまりと捉えて積分したものに，$\dfrac{1}{a}$ をかける。

# 第15講 PART3 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int\sqrt{2x-1}\,dx=$ ［ア］ $+C$

① $\dfrac{1}{3}\sqrt{2x-1}$　② $(2x-1)\sqrt{2x-1}$

③ $\dfrac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$　④ $\dfrac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

**2** $\displaystyle\int\frac{6}{3x+1}\,dx=$ ［イ］ $+C$

① $-\dfrac{6}{(3x+1)^2}$　② $\log|3x+1|$

③ $2\log|3x+1|$　④ $6\log|3x+1|$

**3** $\displaystyle\int\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta=$ ［ウ］ $+C$

① $\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　② $-3\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

③ $-\dfrac{1}{3}\sin\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　④ $-\dfrac{1}{3}\cos\left(3\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

**4** $\displaystyle\int(e^{3x}+5^{2x-1})\,dx=$ ［エ］ $+C$

① $e^{3x}+5^{2x-1}$　② $e^{3x}+\dfrac{5^{2x-1}}{\log 5}$

③ $3e^{3x}+\dfrac{2\cdot 5^{2x-1}}{\log 5}$　④ $\dfrac{1}{3}e^{3x}+\dfrac{5^{2x-1}}{2\log 5}$

# PART4 次数下げと部分分数分解

## 要点整理と公式

### 要点 ① 分子の次数下げ

分子の次数が分母の次数より大きい分数関数の不定積分は，除法の結果を用いて分子の次数を下げることで，不定積分が求められる形にする。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$ を求める。

$$\begin{array}{r}
x+1\phantom{)} \\
x-1\,\big)\overline{x^2\qquad+1} \\
\underline{x^2-x\phantom{+1}} \\
x+1 \\
\underline{x-1} \\
2
\end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$$

であるから

$$\int\frac{x^2+1}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x-1|+C$$

### 要点 ② 部分分数分解

$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ のように，1つの分数式をより簡単な分数式の和や差の形で表すことを「　　　　　　　　」するという。部分分数に分解することにより，不定積分が求められる形にする。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)(x+3)}dx$ を求める。

$\dfrac{1}{(2x-1)(x+3)}=\dfrac{\phantom{a}}{2x-1}+\dfrac{\phantom{b}}{x+3}$ とおき，分母をはらうと

$1=a(x+3)+b(2x-1)\qquad 1=(a+2b)x+3a-b$

$a+2b=0$，$3a-b=1$ より $a=\dfrac{2}{7}$，$b=-\dfrac{1}{7}$

よって $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)(x+3)}dx=\int\frac{\frac{2}{7}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{7}}{x+3}dx=\frac{1}{7}\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\log|2x-1|-\log|x+3|\right)+C$$

$$=\frac{1}{7}(\log|2x-1|-\log|x+3|)+C=\frac{1}{7}\log\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|+C$$

**[MEMO]**

**4** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

## Point Pickup

**分数関数の不定積分**

・(分子)÷(分母)を計算し，分子の次数を下げる

・部分分数に分解する

ことにより，不定積分が求められる形に変形する。

# 第15講 PART4 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-1}{x+3}dx=\int\left(x-\boxed{ア}+\frac{\boxed{イ}}{x+3}\right)dx$

$=\boxed{ウ}+C$

[ $\boxed{ウ}$ の選択肢 ]

① $x^2-3x+2\log|x+3|$　② $\dfrac{1}{2}x^2-x+\log|x+3|$

③ $\dfrac{1}{2}x^2-x+2\log|x+3|$　④ $\dfrac{1}{2}x^2-2x+\log|x+3|$

**2** $\displaystyle\int\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}dx=\int\left\{\boxed{エ}x+\frac{\boxed{オ}}{x(x+1)}\right\}dx$

$=\boxed{カ}+C$

[ $\boxed{カ}$ の選択肢 ]

① $x^2+\log|x(x+1)|$　② $x^2+\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

③ $x^2-\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$　④ $2x^2+\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

**3** $\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{\boxed{キ}}{x+1}+\frac{\boxed{ク}}{x+3}\right)dx$

$=\boxed{ケ}+C$

[ $\boxed{ケ}$ の選択肢 ]

① $\log|(x+1)(x+3)|$　② $\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|$

③ $\log(x+1)^2|x+3|$　④ $\log|x+1|(x+3)^2$

# PART5 三角関数の次数を下げる

## 要点整理と公式

### 要点① 2倍角の公式の利用

三角関数の倍角(2倍角)の公式を次のように変形し，三角関数の次数を下げることで，不定積分が求められる形にする。

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \iff \sin x\cos x =$$

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x \iff \sin^2 x =$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x-1 \iff \cos^2 x =$$

(ex) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \qquad dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

同様に，3倍角の公式とその変形により，三角関数の次数を下げることができる。

$$\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x \iff \sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

$$\cos 3x = -3\cos x+4\cos^3 x \iff \cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$$

### 要点② 積→和の公式

三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ……③

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ……④

において

①＋②より $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ ……⑤

①－②より $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ ……⑥

③＋④より $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ ……⑦

③－④より $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ ……⑧

⑤～⑧より，次の公式が得られる。

**積→和の公式**

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

これらの公式を用いることで，三角関数の次数を下げ，不定積分が求められる形に変形することができる。

(ex) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x dx=\int\frac{1}{2}(\qquad+\qquad)dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)+C=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

**5** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x dx$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 4x dx$　　(4) $\displaystyle\int \cos 3x \cos x dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x dx$

## Point Pickup

**公式を利用した三角関数の不定積分**

・2倍角の公式の利用

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

・積→和の公式の利用

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

により，不定積分が求められる形に変形する。

# 第15講 PART5 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，$C$ は積分定数とする。

**1** $\int \sin x \cos x dx =$ [ア] $+C$

① $\cos 2x$　② $\frac{1}{2}\sin 2x$

③ $\frac{1}{4}\cos 2x$　④ $-\frac{1}{4}\cos 2x$

**2** $\int \cos^2 3x dx =$ [イ] $+C$

① $\frac{1}{2}x+\sin 6x$　② $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\cos x$

③ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x$　④ $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x$

**3** $\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{[ウ]}\int (\sin [エ] x + \sin [オ] x) dx$

$=$ [カ] $+C$

ただし，[エ] $>$ [オ] とする。

[ [カ] の選択肢 ]

① $\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$　② $\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x$

③ $\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x$　④ $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x$

**4** $\int \cos 4x \cos 3x dx =$ キ $+C$

① $\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 3x$　② $\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{3}\cos 3x$

③ $\frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x$　④ $\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x$

**5** $\int \sin x \sin 4x dx =$ ク $+C$

① $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{8}\sin 4x$　② $\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{8}\cos 4x$

③ $\frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 3x$　④ $-\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x$

**[MEMO]**

# 第16講　置換積分法，部分積分法

# PART1 置換積分法

## 要点整理と公式

### 要点① 置換積分法

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数，すなわち $F(x)=\int f(x)dx$ とする。ここで，$x$ が $t$ の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$F(x)=F(g(t))$ は $t$ の関数として表される。よって，$F(x)$ を $t$ で微分すると，合成関数の微分法により

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(x) &= \frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}\\
&= f(x)g'(t)\\
&= f(g(t))g'(t)
\end{aligned}
$$

すなわち $\frac{d}{dt}F(x)=f(g(t))g'(t)$ より $F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$ と表される。

以上より，次の公式が成り立つ。

**置換積分法①**

$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$　　　ただし $x=g(t)$

この公式は $\int f(x)dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$ と書くことができる。

(ex) 不定積分 $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ を求める。

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと $x=t^2-2$ より $\frac{dx}{dt}=$

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+2}\,dx &= \int(t^2-2)t\cdot\quad dt=2\int(t^4-2t^2)dt\\
&= 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-10)+C\\
&= \frac{2}{15}(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2}+C
\end{aligned}
$$

$x=g(t)$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ である。$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ を形式的に $dx=g'(t)dt$ と書くこととする。これにより $\int f(x)dx$ について，$x$ を $g(t)$ に，$dx$ を $g'(t)dt$ におき変えることで

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

が得られる。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ を求める。

$\sqrt{1-x}=t$ とおくと $x=1-t^2$ より $\dfrac{dx}{dt}=-2t$ すなわち $dx=$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=\int \frac{1-t^2}{t}\cdot \qquad\qquad =2\int (t^2-1)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-3)+C$$

$$=-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}+C$$

**1** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^2}\,dx$

## Point Pickup

**置換積分法①**

$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$ ただし $x=g(t)$

# 第16講 PART1 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x=t^2-1$

$$\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx=\int\left(\boxed{\text{アイ}}\,t^4-\boxed{\text{ウ}}\,t^2\right)dt$$

$$=\boxed{\text{エ}}+C$$

[ エ の選択肢 ]

① $x(x+1)\sqrt{x+1}$　② $2x(x+1)\sqrt{x+1}$

③ $(x+1)^2\sqrt{x+1}$　④ $2\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}$

**2** $\displaystyle\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx$

$x-2=t$ とおくと，$x=t+2$

$$\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{t+\boxed{\text{オ}}}{t^2}dt$$

$$=\boxed{\text{カ}}+C$$

[ カ の選択肢 ]

① $\log|x|-\dfrac{3}{x}$　② $\log|x-2|-\dfrac{1}{x-2}$

③ $\log|x-2|-\dfrac{3}{x-2}$　④ $\log|x-2|-\dfrac{6}{(x-2)^3}$

# PART2 $f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

## 要点整理と公式

### 要点 ① $f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \qquad (x = g(t))$$

において，左辺と右辺を入れ替え，積分変数 $x$ を $u$ に，$t$ を $x$ に変えると，次の公式が得られる。

**置換積分法②**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \qquad \text{ただし } g(x) = u$$

(ex) 不定積分 $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求める。

$x^2-1 = u$ とおくと　$2x = \dfrac{du}{dx}$ より　$2xdx = du$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-1}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + C$$

### 要点 ② $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \cdots\cdots ① \qquad (g(x) = u)$$

において，$f(u) = \dfrac{1}{u}$ とすると

①の左辺は $\displaystyle\int f(u)g'(x)dx = \int \frac{1}{u}\cdot g'(x)dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$

①の右辺は $\int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log|g(x)| + C$

より，次の公式が成り立つ。

**$\frac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分**

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C$$

(ex) 不定積分 $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$ を求める。

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{\phantom{(x^2+3)'}}{x^2+3}dx = \qquad\qquad + C = \log(x^2+3) + C$$

**2** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x dx$

## Point Pickup

**置換積分法②**

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　　ただし $g(x)=u$

とくに $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

# 第16講 PART2 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

また，$C$ は積分定数とする。

**1** $\int x^2(x^3+2)^5 dx$

$x^3+2=u$ とおくと，［ア］$dx=du$

$$\int x^2(x^3+2)^5 dx=\int [\text{イ}]\, du$$

$$=[\text{ウ}]+C$$

［ ア の選択肢 ］

① $x^2$　② $3x^2$　③ $3u^2$

［ イ の選択肢 ］

① $u^5$　② $3u^5$

③ $\frac{1}{3}u^5$　④ $\frac{1}{3}u^7$

［ ウ の選択肢 ］

① $5(x^3+2)^4$　② $(x^3+2)^6$

③ $\frac{1}{6}(x^3+2)^6$　④ $\frac{1}{18}(x^3+2)^6$

**2** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$x^2+1=u$ とおくと，$\boxed{\text{エ}}\,dx=du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \boxed{\text{オ}}\,du$$

$$=\boxed{\text{カ}}+C$$

[ $\boxed{\text{エ}}$ の選択肢 ]

① $x$　② $2x$　③ $2u$

[ $\boxed{\text{オ}}$ の選択肢 ]

① $\sqrt{u}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$

③ $\dfrac{2}{\sqrt{u}}$　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

[ $\boxed{\text{カ}}$ の選択肢 ]

① $\sqrt{x^2+1}$　② $2\sqrt{x^2+1}$

③ $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}$　④ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

**3** $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx=\boxed{\text{キ}}+C$

① $e^x+x$　② $\log(e^x+1)$

③ $\log|e^x+x|$　④ $\log\left|\dfrac{e^x+1}{e^x+x}\right|$

**4** $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}=\boxed{\text{ク}}+C$

① $\cos^2 x$　② $\log|\sin x|$

③ $-\log|\sin x|$　④ $\log|\cos x|$

**[MEMO]**

# PART3 置換積分法と三角関数

## 要点整理と公式

### 要点① $\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$ の形の不定積分

置換積分法の公式

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \cdots\cdots ① \qquad (g(x)=u)$$

において，$f(u)=u^{\alpha}$ とすると

①の左辺は $\int f(u)g'(x)dx=\int u^{\alpha}g'(x)dx=\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$

①の右辺は $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C=\dfrac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

より，次の公式が成り立つ。

**$\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx$ の不定積分**

$$\int\{g(x)\}^{\alpha}g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$$

(ex) 不定積分 $\int\sin^3x\cos xdx$ を求める。

$$\int\sin^3x\cos xdx=\int\sin^3x \qquad dx= \qquad +C$$

### 要点② やや複雑な三角関数の不定積分

置換積分法を用いて，三角関数の不定積分を求める。

(ex) 不定積分 $\int\sin^3xdx$ を求める。

$$\int\sin^3xdx=\int \qquad \cdot \qquad dx=\int(1-\cos^2x)\sin xdx$$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin xdx=du$

$$\int\sin^3xdx=\int(1-u^2)\cdot(-1)du=\int(u^2-1)du$$

$$=\frac{1}{3}u^3-u+C$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を求める。

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\phantom{\sin x}}{\phantom{1-\cos^2 x}}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x dx=du$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{-1}{1-u^2}du=\int\frac{1}{(u-1)(u+1)}du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}(\log|u-1|-\log|u+1|)+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

**3** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x \cos^5 x dx$　　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

## Point Pickup

**置換積分法と三角関数**

積分する関数を ( $\sin x$ の式 ) $\times\cos x$ や ( $\cos x$ の式 ) $\times\sin x$ の形に変形し，それぞれ $\sin x=u$，$\cos x=u$ とおくことで，置換積分法の公式を用いて不定積分を計算することができる。

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du \qquad (g(x)=u)$$

→ $$\int \{g(x)\}^{\alpha} g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$$

# 第16講 PART3 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，$C$ は積分定数とする。

**1** $\int \sin^4 x \cos x dx = \boxed{\text{ア}} + C$

① $\sin^5 x$　② $4\sin^3 x$

③ $\frac{1}{5}\sin^5 x$　④ $\frac{1}{5}\cos^5 x$

**2** $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \boxed{\text{イ}} + C$

① $\tan x$　② $\frac{1}{\tan x}$

③ $2\tan^2 x$　④ $\frac{1}{2}\tan^2 x$

**3** $\displaystyle\int \frac{2}{\sin x}dx$

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}$$

$\cos x = u$ とおくと， $\boxed{\text{ウ}}\,dx = du$

$$\int \frac{2}{\sin x}dx=\int \frac{\boxed{\text{エオ}}}{1-u^2}du$$

$$=\boxed{\text{カ}}+C$$

[ $\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢 ]

① $\sin x$　　② $-\sin x$

③ $-\cos x$　　④ $-\sin u$

[ $\boxed{\text{カ}}$ の選択肢 ]

① $\log(1-\cos^2 x)$　　② $\log\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

③ $\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$　　④ $\log\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

# [MEMO]

# PART4 部分積分法

## 要点整理と公式

### 要点 ① 部分積分法

積の微分法の公式

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

より $f(x)g(x)$ は右辺の原始関数である。

よって

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

この結果より，次の公式が成り立つ。

**部分積分法**

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(ex) 不定積分 $\int x\sin x dx$ を求める。

$$\int x\sin x dx=\int x \qquad\qquad dx$$

$$=\quad\cdot\qquad\qquad-\int\qquad\cdot\qquad\qquad dx$$

$$=x(-\cos x)-\int\quad\cdot(-\cos x)dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C$$

(ex) 不定積分 $\int \log x dx$ を求める。

$$\int \log x dx=\int\qquad \log x dx=\int\qquad\log x dx$$

$$=x\log x-\int x\qquad dx$$

$$=x\log x-\int dx=x\log x-x+C$$

**[MEMO]**

**4** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)\cos 2x dx$　(2) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$　(3) $\displaystyle\int \log(x-2) dx$

## Point Pickup

**部分積分法**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

積分する関数が，種類の異なる関数の積の形になっているときに有効。

$f(x)$ として

・整式（微分すると次数が下がる）

・対数関数（微分すると分数関数になる）

を選ぶとよい。

# 第 16 講　PART4 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

また，$C$ は積分定数とする。

**1** $\displaystyle\int(x+1)\sin x dx=\int(x+1)(\boxed{\text{ア}})' dx$

$\displaystyle=\boxed{\text{イ}}+C$

[ $\boxed{\text{ア}}$ の選択肢 ]

① $\sin x$　② $-\sin x$

③ $\cos x$　④ $-\cos x$

[ $\boxed{\text{イ}}$ の選択肢 ]

① $-(x+1)\cos x$　② $(x+1)\sin x-\cos x$

③ $(x+1)\cos x-\sin x$　④ $-(x+1)\cos x+\sin x$

**2** $\displaystyle\int x^2 e^x dx=x^2 e^x-\int\boxed{\text{ウ}}e^x dx$

$\displaystyle=(\boxed{\text{エ}})e^x+C$

[ $\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢 ]

① $x$　② $2x$

③ $x^2$　④ $\dfrac{1}{3}x^3$

[ $\boxed{\text{エ}}$ の選択肢 ]

① $x^2-x+1$　② $x^2+x-1$

③ $x^2-2x+2$　④ $x^2+2x-2$

**3** $\displaystyle\int x^2 \log x dx = \int (\boxed{\text{オ}})' \cdot \log x dx$

$= \boxed{\text{カ}} + C$

[ オ の選択肢 ]

① $2x$　② $x^2$

③ $x^3$　④ $\dfrac{x^3}{3}$

[ カ の選択肢 ]

① $x^2 \log x - \dfrac{x^2}{2}$　② $x^3 \log x - x^3$

③ $\dfrac{x^3}{3} \log x - \dfrac{x^3}{3}$　④ $\dfrac{x^3}{3} \log x - \dfrac{x^3}{9}$

**[MEMO]**

# 第17講 定積分

# PART1 定積分の計算

## 要点整理と公式

### 要点① 定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ について，$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とする。このとき，区間内の2数 $a$，$b$ に対して

$F(b)-F(a)$

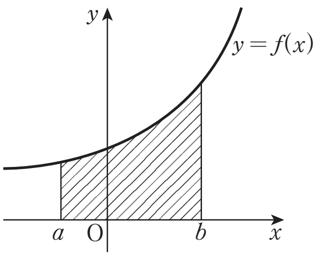
を，$f(x)$ の $a$ から $b$ までの「　　　　」といい，　　　　　と表す。$a$ をこの定積分の「　　　」，$b$ を「　　　」という。$a$ と $b$ の大小関係は $a<b$，$a=b$，$a>b$ のいずれでもよい。

**定積分**

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$ を $a$ から $b$ まで「　　　　　」という。不定積分の結果が積分変数を変数とする関数であるのに対して，定積分の結果は定数であり，その結果は積分変数によらない。例えば，$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$ である。

区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x)\geqq 0$ のとき定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，$y=f(x)$ のグラフと2直線 $x=a$，$x=b$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積に等しい。




定積分においては，$F(b)-F(a)$ の計算の際に積分定数 $C$ が消えるため，積分定数を省いて計算を行う。

(ex) $\int_2^3 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^3=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

$$\int_0^{\pi} 2\sin 2\theta d\theta=[-\cos 2\theta]_0^{\pi}=-\{1-(1)\}=0$$

## 要点② 定積分の性質

定積分について，次のことが成り立つ。

**定積分の性質**

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\text{ は定数})$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(ex) $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2-2x+3}{x}dx = \int_1^e\left(x-2+\frac{3}{x}\right)dx = \int_1^e xdx - 2\int_1^e dx + 3\int_1^e \frac{dx}{x}$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - 2[x]_1^e + 3[\log x]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1^2) - 2(e-1) + 3(1-0) = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{9}{2}$$

## 要点③ 絶対値のついた関数の定積分

　絶対値がついた関数の定積分は，絶対値記号の中の式の正負の境目となる $x$ の値で積分区間を分けて計算する。

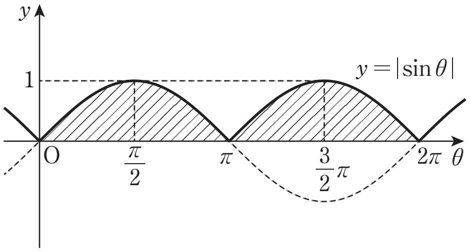
(ex) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta$ を求める。

$0 \leqq \theta \leqq \quad$ のとき $|\sin\theta| = \sin\theta$

$\quad \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき $|\sin\theta| = -\sin\theta$

よって

$$\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta = \int_0 \sin\theta d\theta + \int^{2\pi}(-\sin\theta)d\theta$$




$$= [-\cos\theta]_0^{\pi} + [\cos\theta]_{\pi}^{2\pi} = \{1-(-1)\} + \{1-(-1)\} = 4$$

**1** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}\,dt-\int_1^0 e^{2t-1}\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \sin 3x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} |\cos x|\,dx$

# Point Pickup

**定積分の計算**

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

不定積分 $F(x)$ を求め，$F(b)-F(a)$ を計算する。

# 第17講 PART1 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

**1** $\displaystyle\int_1^2 (3x-5)^4\,dx = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

**2** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2} = \log\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$

**3** $\displaystyle\int_1^2 e^{-t}\,dt - \int_1^0 e^{-t}\,dt = \boxed{\text{カ}}$

① $\dfrac{1}{e^2}$　② $-\dfrac{1}{e^2}$

③ $1-\dfrac{1}{e^2}$　④ $\dfrac{1}{e^2}-1$

**4** $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \boxed{\text{キ}}$

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{\pi}{2}$

③ $\pi$　④ $\dfrac{3}{2}\pi$

**5** $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x\cos x\,dx = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

**6** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x|dx=$ [コ]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　② $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　④ $2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**[MEMO]**

# PART2 定積分の置換積分法

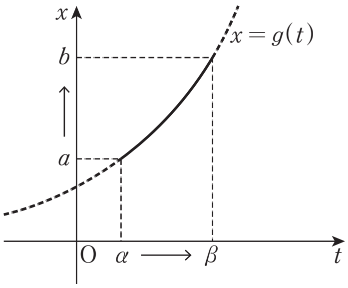
## 要点整理と公式

### 要点① 定積分の置換積分法①

$x=g(t)$ のとき，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$，すなわち $F(x)=\int f(x)dx$ とすると，不定積分の置換積分法により

$$F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$$

と表される。




ここで，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とすると，$x$ と $t$ の関係は右表のように表される。このとき

| $x$ | $a$ | → | $b$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | → | $\beta$ |

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dx=[F(x)]_{\alpha}^{\beta}=[F(g(t))]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b=\int_a^b f(x)dx$$

となる。よって，次の公式が得られる。

**定積分の置換積分法①**

$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

| $x$ | $a$ | → | $b$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | → | $\beta$ |

(ex) 定積分 $\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx$ を求める。

$t=\sqrt{x-2}$ とおくと $x=t^2+2$

| $x$ | | → | |
|---|---|---|---|
| $t$ | | → | |

$\dfrac{dx}{dt}=2t$ つまり $dx=2tdt$

$$\int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx=\int \quad (t^2+2)t\cdot 2tdt=2\int_0^1 (t^4+2t^2)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{5}(1-0)+\frac{4}{3}(1-0)=\frac{26}{15}$$

## 要点② 定積分の置換積分法②

定積分の置換積分法の公式 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ において，$x$ と $t$ を入れ替えると，次の公式が得られる。

**定積分の置換積分法②**

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$　　ただし，$g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

(ex) 不定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\cos x dx$ を求める。

$\sin x = t$ とおくと　$\cos x dx = dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\cos x dx = \int \quad (1+t^2)dt$$

$$= \left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

| $x$ | $0 \to \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $t$ | $\to$ |

**2**　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

## Point Pickup

**定積分の置換積分法**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$　ただし $x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$　ただし $g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

以下の形のように，不定積分がすぐに求められる場合は，置き換えせずに定積分を求めることが可能。その場合は，積分区間の置き換えは不要となる。

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$$

$$\int\{g(x)\}^\alpha g'(x)dx=\frac{\{g(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

# 第17講　PART2 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

**1**　$\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおいて，$t$ の定積分で表して求める。

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \boxed{\text{イ}}$$

$$= \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

| $x$ | 0 | → | 3 |
|---|---|---|---|
| $t$ | 1 | → | ア |

[ イ の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_1^2 (t^2-1)dt$　　② $\displaystyle\int_1^2 (2t^2+2)dt$

③ $\displaystyle\int_1^2 (2t^2-2)dt$　　④ $\displaystyle\int_0^3 (2t^2-2)dt$

**2**　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^4 x dx$

$\cos x=t$ とおいて，$t$ の定積分で表して求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^4 x dx = \boxed{\text{オ}}$$

$$= \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

[ オ の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_0^1 t^4 dt$　　② $\displaystyle\int_1^0 t^4 dt$

③ $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{2} dt$　　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^4 dt$

**3** $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$

$\log x = t$ とおいて，$t$ の定積分で表して求める。

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \boxed{\text{ク}}$$

$$= \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

[ ク の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_0^1 tdt$　② $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt$

③ $\displaystyle\int_1^e tdt$　④ $\displaystyle\int_0^1 e^t dt$

**[MEMO]**

# PART3 特殊な形の置換積分法

## 要点整理と公式

### 要点 ① $x=a\sin\theta$ とおく置換積分法

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ を求める。

$x=$ 　　　とおくと　$dx=\cos\theta d\theta$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$

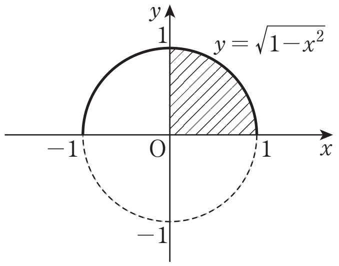
| $x$ | $0\ \to\ 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\to$ |

区間 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos\theta\geqq0$ であるから $\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

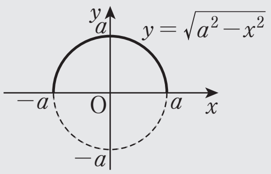
$y=\sqrt{1-x^2}\iff x^2+y^2=1$，$y\geqq0$ であるから $y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 1 の円の上半分となる。$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，右図の斜線部分の面積に等しい。




**$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分**

$\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ の定積分は

$x=a\sin\theta$ とおき，$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。



## 要点② $x=a\tan\theta$ とおく置換積分法

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求める。

$x=$ 　　　とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

| $x$ | $0 \to 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\to$ |

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

### $x^2+a^2$ の定積分

$x^2+a^2$ の定積分は

$x=a\tan\theta$ とおき，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

**3** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　(3) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

---

# Point Pickup

**特殊な形の置換積分法**

$\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$ の定積分

→ $x=a\sin\theta$ とおき，$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する

$x^2+a^2$ の定積分

→ $x=a\tan\theta$ とおき，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

# 第 17 講 PART3 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

**1** $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$x=2\sin\theta$ とおいて，$\theta$ の定積分で表して求める。

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\text{イ}}$$

$$= \boxed{\text{ウ}}$$

| $x$ | $0$ | $\to$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $0$ | $\to$ | $\boxed{\text{ア}}$ |

[ ア の選択肢 ]

① $1$　② $\pi$　③ $\dfrac{\pi}{2}$

[ イ の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\theta d\theta$　② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta$

③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta$　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta d\theta$

[ ウ の選択肢 ]

① $1$　② $\pi$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $2\pi$

**2** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

$x=$ エ $\sin\theta$ とおいて，$\theta$ の定積分で表して求める。

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=\boxed{\text{オ}}$$

$$=\frac{\pi}{\boxed{\text{カキ}}}$$

[ エ の選択肢 ]

① $2$　② $2\sqrt{2}$　③ $4$

[ オ の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}d\theta$　② $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

③ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$　④ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta$

**3** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$

$x=$ [ク] とおいて，$\theta$ の定積分で表して求める。

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\boxed{\text{ケ}}$$

$$=\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}$$

[ [ク] の選択肢 ]

① $\sin\theta$　　② $\cos\theta$　　③ $\tan\theta$

[ [ケ] の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$　　② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta d\theta$

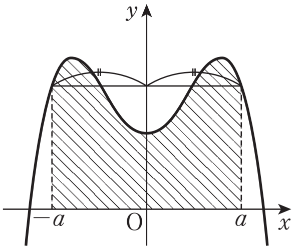
③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$　　④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta d\theta$

# PART4 偶関数・奇関数の定積分

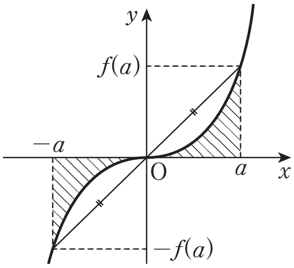
## 要点整理と公式

### 要点 ① 偶関数・奇関数の定積分

$f(x)=x^2$，$f(x)=\cos x$ のように，
$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，
$f(x)$ は「　　　　」という。偶関数の
グラフは「　　」に関して対称である。




$f(x)=x^3$，$f(x)=\sin x$ のように，
$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，
$f(x)$ は「　　　　」という。奇関数の
グラフは「　　」に関して対称である。




偶関数，奇関数の定積分について，次のことが成り立つ。

**偶関数・奇関数の定積分**

$f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

（証明）

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において，$x=-t$ とおくと $dx=(-1)dt$

| $x$ | $-a \to 0$ |
|---|---|
| $t$ | $a \to 0$ |

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-\quad)d$$

よって $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}dx$ より

$f(x)$ が偶関数ならば $f(-x)=f(x)$ より $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数ならば $f(-x)=-f(x)$ より $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

(ex)

$$\int_{-1}^{1}(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)dx=2\int^{1}(5x^4+3x^2+1)dx=2\left[x^5+x^3+x\right]_0^1=6$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

**4** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

## Point Pickup

**偶関数・奇関数の定積分**

$f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(偶関数) × (偶関数) = (偶関数)

(偶関数) × (奇関数) = (奇関数)

(奇関数) × (奇関数) = (偶関数)

# 第17講 PART4 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

**1** $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3(3x^2-4)dx$

$x^3(3x^2-4)$ は ア であるから，

$$\int_{-2}^{2} x^3(3x^2-4)dx = \boxed{イ}$$

[ ア の選択肢 ]

① 偶関数　② 奇関数

[ イ の選択肢 ]

① 0　② 8

③ 16　④ 32

**2** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$x\sqrt{1-x^2}$ は ウ であるから，

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = \boxed{エ}$$

[ ウ の選択肢 ]

① 偶関数　② 奇関数

[ エ の選択肢 ]

① 0　② 1

③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

**3** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

$\cos^2 x$ は オ であるから，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx = \boxed{カ}$$

$$= \boxed{キ}$$

[ オ の選択肢 ]

① 偶関数　　② 奇関数

[ カ の選択肢 ]

① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$　　② $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

③ $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$　　④ $\displaystyle -2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$

[ キ の選択肢 ]

① $\dfrac{2}{3}\pi$　　② $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　④ $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{12}$

**[MEMO]**

# PART5 定積分の部分積分法

## 要点整理と公式

### 要点 ① 定積分の部分積分法

不定積分の部分積分法の公式より，定積分について次の公式が得られる。

**定積分の部分積分法**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(ex) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^2\,dx$ を求める。

$$\int_0^1 x(x-1)^2\,dx=\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}'dx$$

$$=\left[x\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(x-1)^3}{3}\,dx$$

$$=0-\frac{1}{12}\Big[(x-1)^4\Big]_0^1=\frac{1}{12}$$

**[MEMO]**

**5** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ (2) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{\log x}{x^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$

# Point Pickup

**定積分の部分積分法**

$$\int_{a}^{b}f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}f'(x)g(x)dx$$

# 第 17 講 PART5 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)^2\,dx = \Big[(x-1)\cdot \boxed{\text{ア}}\Big]_1^2 - \int_1^2 \boxed{\text{イ}}\,dx$

$= \boxed{\text{ウ}}$

[ ア , イ の選択肢 ]

① $(x-2)^2$　② $(x-2)^3$

③ $3(x-2)^3$　④ $\dfrac{(x-2)^3}{3}$

[ ウ の選択肢 ]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{6}$

③ $\dfrac{1}{12}$　④ $-\dfrac{1}{12}$

**2** $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx = \Big[\boxed{\text{エ}}\cdot\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 \boxed{\text{オ}}\,dx$

$= \boxed{\text{カ}}$

[ エ , オ の選択肢 ]

① $\dfrac{x^3}{2}$　② $\dfrac{x^3}{4}$

③ $3x^4$　④ $\dfrac{x^4}{4}$

[ カ の選択肢 ]

① $2\log 2-\dfrac{7}{8}$　② $4\log 2-\dfrac{15}{4}$

③ $4\log 2+\dfrac{15}{16}$　④ $4\log 2-\dfrac{15}{16}$

**3** $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \left[ x^2 \cdot \boxed{\text{キ}} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \boxed{\text{ク}} dx$

$= \boxed{\text{ケ}}$

[ キ , ク の選択肢 ]

① $\sin x$　　② $\cos x$

③ $2x \sin x$　　④ $2x \cos x$

[ ケ の選択肢 ]

① $0$　　② $\pi$

③ $2\pi$　　④ $-2\pi$

# [MEMO]

# 第18講　定積分関数

# PART1　定積分で表された関数

## 要点整理と公式

### 要点①　定積分で表された関数の微分

$a$ を定数とするとき，定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は上端 $x$ の関数である。$f(t)$ の不定積分の 1 つを $F(t)$，すなわち $F'(t)=f(t)$ とすると，$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$ であり，この式の両辺を $x$ で微分することにより，次の公式が得られる。

**定積分で表された関数の微分**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a \text{ は定数})$$

(ex) 関数 $\int_1^x e^t \sin t dt$ を $x$ で微分すると

関数 $F(x)=\int_0^x (x+t)\sin t dt$ は $x$ の関数であるが，$\int_0^x (x+t)\sin t dt$ の積分計算においては，積分変数は $t$ であるため，積分変数ではない $x$ を「　　　」として

$$\int_0^x (x+t)\sin t dt=\int_0^x (x\sin t+t\sin t)dt= \qquad \int_0^x \sin t dt+\int_0^x t\sin t dt$$

と変形することができる。よって

$$F(x)=x\int_0^x \sin t dt+\int_0^x t\sin t dt$$

より，この式の両辺を $x$ で微分すると

$$F'(x)=(x)'\int_0^x \sin t dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt\right)+\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin t dt$$

$$=1\cdot\int_0^x \sin t dt+x\cdot \qquad +$$

$$=[-\cos t]_0^x+2x\sin x=-\cos x+1+2x\sin x=2x\sin x-\cos x+1$$

として，$F(x)$ の導関数を求めることができる。

**[MEMO]**

**1** 次の関数を $x$ で微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^x (t-2)e^t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt$

## Point Pickup

**定積分で表された関数の微分**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$ （$a$ は定数）

積分計算において，積分変数ではない文字は「定数」として扱う。

# 第18講 PART1 確認問題

次の関数を $x$ で微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

**1** $\displaystyle\int_1^x (t+1)e^t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (t+1)e^t\,dt = \boxed{\text{ア}}$$

① $xe^x$　② $(x+1)e^x$

③ $-(x+1)e^x$　④ $(t+1)e^t$

**2** $\displaystyle\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = \boxed{\text{イ}}$$

① $\sin^2 x$　② $\sin^2 2x$

③ $2\sin^2 2x$　④ $\dfrac{1}{2}\sin^2 2x$

**3** $\displaystyle\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt = \boxed{\text{ウ}}$$

① $\sin 2x$　② $\cos 2x$

③ $2\sin 2x$　④ $\dfrac{1}{2}\sin 2x$

# PART2 関数方程式

## 要点整理と公式

### 要点 ① $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ を含む等式から関数を求める

等式 $f(x)=\sin x-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求める

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ は「　　　」であるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt$ 　　とおくと

$$f(x)=\sin x-k$$

よって

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-k)\cos t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t-k\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2t}{2}-k\cos t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{\cos 2t}{4}-k\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-k$$

より，$k=\dfrac{1}{2}-k$ 　　よって $k=\dfrac{1}{4}$

したがって $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{4}$

### 要点 ② $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ を含む等式から関数を求める

等式 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\displaystyle\int_0^x(t-x)\sin t dt$ ……① を満たす関数 $f(x)$ を求める

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x t\sin t dt-x\int_0^x \sin t dt$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+x\sin x-\int_0^x \sin t dt-x\sin x=\frac{1}{2}-[-\cos t]_0^x=\cos x-\frac{1}{2}$$

よって $f(x)=\int\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx=\sin x-\frac{1}{2}x+C$ …… ②

①で $x=$　のとき $f(0)=0$

よって，②より $C=0$

したがって $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$

**2** 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2e^x-\int_0^1 f(t)dt$

(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$

## Point Pickup

**関数方程式**

・$a$，$b$ が定数のとき $\int_a^b f(t)dt$ は定数

・$a$ が定数のとき $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　　$\int_a^a f(t)dt=0$

を利用し，定積分を含む関数を求める。

# 第18講 PART2 確認問題

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

**1** $f(x)=2+\cos\pi x-\int_0^1 f(t)\,dt$

$f(x)=$ ア

① $\cos\pi x$　② $1+\cos\pi x$

③ $3+\cos\pi x$　④ $x+\cos\pi x$

**2** $f(x)=x^2+\int_1^x (x-t)e^t\,dt$

$f'(x)$ を求めると，$f'(x)=$ イ

また，$f(1)=$ ウ

よって，$f(x)=$ エ

[ イ の選択肢 ]

① $x+e^x$　② $2x+e^x$

③ $2x+e^x-1$　④ $2x+e^x-e$

[ エ の選択肢 ]

① $x^2+e^x$　② $x^2+ex-e^x$

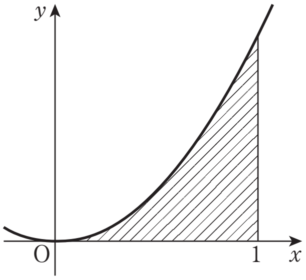
③ $x^2-ex+e^x$　④ $x^2-ex+e^x-1$

# 第19講　区分求積法，定積分と不等式

# PART1　区分求積法と定積分

## 要点整理と公式

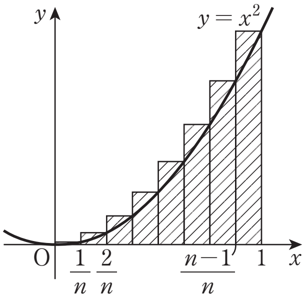
### 要点 ①　区分求積法




曲線 $y=x^2$ と $x$ 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S= \qquad\qquad =\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

のように，定積分を用いて求めることができる。

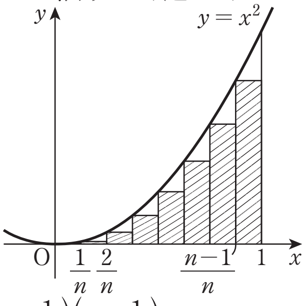



ここで，区間 $[0,\ 1]$ を　　　　　し，分割した小区間を底辺，各小区間の右端の $y$ の値を高さとする $n$ 個の長方形をつくり，その面積の和を $S_n$ とすると

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\qquad\left(\qquad\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}=S$ であるから，$n\to\infty$ のとき $S_n$ は $S$ に限りなく近づく。




また，各区間の左端の $y$ の値を高さとする $n$ 個の長方形の和を $T_n$ とすると

$$T_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

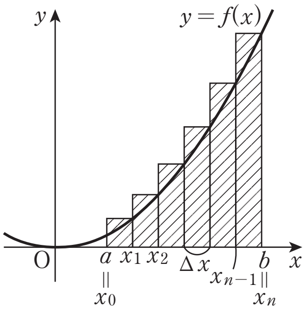
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=}^{}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{3}=S$ であるから，$n\to\infty$ のとき $T_n$ は $S$ に限りなく近づく。

このように，ある図形を長方形に分割し，その面積の　　　　　として図形の面積を求める方法を「　　　　　　」という。

## 要点② 区分求積法と定積分

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x)\geqq 0$ のとき，面積 $S=\int_a^b f(x)dx$ を区分求積法で考える。




区間 $[a,\ b]$ を $n$ 等分し，その分点を $a$ に近い方から順に $x_1$，$x_2$，……，$x_{n-1}$ とし，$a=x_0$，$b=x_n$ とする。

また，分割した小区間の幅を $\Delta x$ とすると，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ である。このとき，右図の斜線部分の面積 $S_n$ は

$$S_n=\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\cdots\cdots+\Delta x\cdot f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

であり，$n\to\infty$ のとき，$S_n$ は $S$ に限りなく近づく。また

$$T_n=\Delta x\cdot f(x_0)+\Delta x\cdot f(x_1)+\cdots\cdots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x$$

において，$n\to\infty$ のとき，$T_n$ は $S$ に限りなく近づく。

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であれば，常に $f(x)\geqq 0$ でなくとも，次のことが成り立つ。

### 区分求積法と定積分①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

ただし，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$

上の公式において，$a=0$，$b=1$ とすると，$\Delta x=\dfrac{1}{n}$，$x_k=\dfrac{k}{n}$ となり，次の等式が成り立つ。

### 区分求積法と定積分②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

(ex) $S=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^6}(1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^5=\lim_{n\to\infty}\qquad\sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\right)^5$

$f(x)=\quad{}^5$ とおくと $S=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\qquad dx=\left[\dfrac{1}{6}x^6\right]_0^1=\dfrac{1}{6}$

**1** 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

# Point Pickup

**区分求積法と定積分**

$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

とくに $a=0$，$b=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

# 第19講 PART1 確認問題

次の極限値を求めよ。

答えは下の選択肢のうちから選べ。

**1** $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}=\int_0^1 \boxed{\text{ア}}\,dx$

$=\boxed{\text{イ}}$

[ $\boxed{\text{ア}}$ の選択肢 ]

① $\cos x$　　② $\cos \pi x$

③ $\cos\frac{\pi}{2}x$　　④ $\sin\frac{\pi}{2}x$

[ $\boxed{\text{イ}}$ の選択肢 ]

① $\frac{\pi}{2}$　　② $\frac{1}{\pi}$

③ $\frac{2}{\pi}$　　④ $-\frac{2}{\pi}$

**2** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\int_0^1 \boxed{\text{ウ}}\,dx$

$=\boxed{\text{エ}}$

[ ウ の選択肢 ]

① $\sqrt{x}$　② $x\sqrt{x}$

③ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　④ $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

[ エ の選択肢 ]

① $1$　② $\dfrac{2}{3}$

③ $\dfrac{3}{2}$　④ $\dfrac{3}{4}$

**3** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+n}\right)^2\right\}$

$=\displaystyle\int_0^1 \boxed{\text{オ}}\,dx$

$=\boxed{\text{カ}}$

[ オ の選択肢 ]

① $\dfrac{1}{x^2}$　② $(1+x)^2$

③ $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2$　④ $\dfrac{1}{1+x^2}$

[ カ の選択肢 ]

① $1$　② $\dfrac{1}{2}$

③ $-\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$

**[MEMO]**

# PART2 定積分と不等式

## 要点整理と公式

### 要点 ① 定積分と不等式

定積分と面積の関係から，次のことが成り立つ。

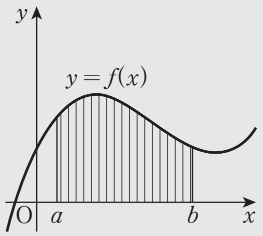
**定積分と不等式①**

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x) \geqq 0$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$$

が成り立つ。

等号成立は，常に $f(x)=0$ のときにのみ成り立つ。

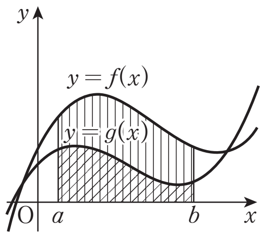



関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$h(x)=f(x)-g(x)$ とすると，区間 $[a,\ b]$ で常に $h(x) \geqq 0$ であるから $\int_a^b h(x)dx \geqq 0$ が成り立つ。

よって $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx \geqq 0$ より

$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つ。

この等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときにのみ成り立つ。




**定積分と不等式②**

関数 $f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のときにのみ成り立つ。

(ex) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$1 \leqq 1+x^2 \leqq 1+x$，すなわち $\dfrac{1}{1+x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であり，この

等号は常には成り立たない。よって

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx$$

が成り立ち，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2$，$\displaystyle\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$ より

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

が成り立つ。

※$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ より，$\log 2 < \dfrac{\pi}{4}$ であることがわかる。

**2** $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ であることを証明し，これを用いて不等式 $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$ が成り立つことを証明せよ。

# Point Pickup

**定積分と不等式**

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

常に $f(x) \geqq 0$ ならば　$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$

（等号成立は，常に $f(x)=0$ のとき）

常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば　$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

（等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のとき）

# 第19講 PART2 確認問題

**1** $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{1}{1+x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ であることを示し，

これを用いて次の不等式を証明せよ。

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

ただし，答えは下の選択肢のうちから選べ。

〔証明〕

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^2 \leqq x$

よって，$1 \leqq$ [ア] $\leqq 1+x$

各辺は正であるから，

$$\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1$$

この不等式の等号は常には成り立たないから，

[イ] $< \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} <$ [ウ]

が成り立つ。ここで，

[イ] $=$ $\Big[$ [エ] $\Big]_0^1$ $=$ [オ]

[ウ] $=$ [カ] であるから，

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

[ [ア] の選択肢]

① $1$　　② $1+x$

③ $x^2$　　④ $1+x^2$

[ イ , ウ の選択肢]

① $\int_0^1 dx$　　② $\int_0^1 (1+x)dx$

③ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$　　④ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

[ エ , オ , カ の選択肢]

① $1$　　② $\log 2$

③ $x$　　④ $\log x$

⑤ $\frac{1}{(1+x)^2}$　　⑥ $\log|1+x|$

# [MEMO]

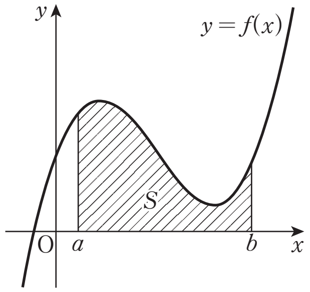
# 第20講　面積

# PART1　曲線と $x$ 軸の間の面積

## 要点整理と公式

### 要点①　曲線と $x$ 軸の間の面積

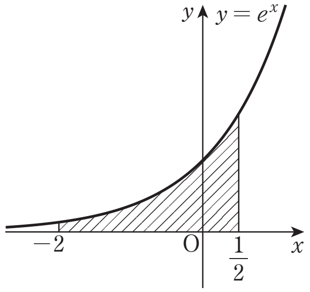
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は




$$S=\int_a^b f(x)dx$$

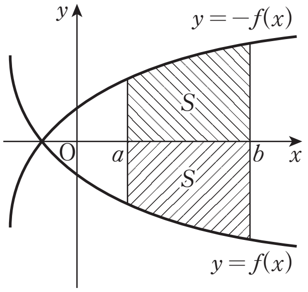
で表される。

(ex) 曲線 $y=e^x$ と $x$ 軸，および 2 直線 $x=-2$，$x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積 $S$ は




$$S=\qquad\qquad=\left[e^x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-\frac{1}{e^2}$$

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

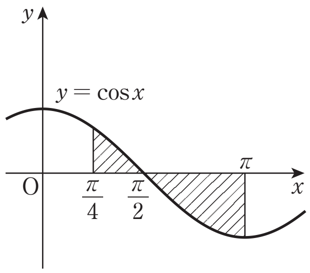



$$S=\int_a^b\{\quad f(x)\}dx=\qquad\int_a^b f(x)dx$$

で表される。

(ex) 曲線 $y=\cos x$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\pi$ で囲まれた 2 つの部分の面積 $S$ について

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\qquad$ では常に $y\geqq 0$，$\qquad\leqq x\leqq\pi$ では常に $y\leqq 0$ であるから



$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \qquad dx$$

$$=[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \quad [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**1** (1) 次の曲線や直線および $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(i) $y=\sin x \quad \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi\right)$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(ii) $y=-\sqrt{x+1}$, $x=-1$, $x=1$

(2) 曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と 2 直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S$ を求めよ。

## Point Pickup

**曲線と $x$ 軸の間の面積**

$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき $S=\displaystyle\int_a^b \{-f(x)\}\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

# 第20講　PART1 確認問題

**1**　曲線 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=-\dfrac{\pi}{3}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。［ア］

答えは下の①～④のうちから選べ。

①　$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$　　②　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

③　$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　④　$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

**2**　曲線 $y=-\sqrt{x+2}$ と $x$ 軸および直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エ}}$ である。

**3**　曲線 $y=e^x-e$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。［オ］

答えは下の①～④のうちから選べ。

①　$e^2+1$　　②　$e^2-e+1$

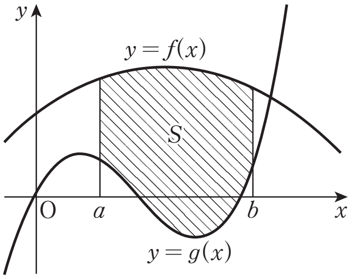
③　$e^2+2e-1$　　④　$e^2-2e+1$

# PART2 2曲線の間の面積

## 要点整理と公式

### 要点 ① 2曲線の間の面積

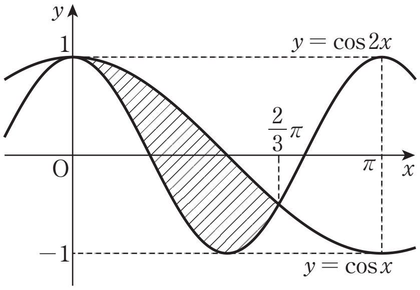
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は




$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

で表される。

(ex) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2曲線 $y=\cos 2x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分の面積 $S$ を求める。




$\cos 2x=\cos x$ を解くと

$$2\cos^2 x-1=\cos x$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

$$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},\ 1$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ において $\cos x$　　$\cos 2x$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\qquad - \qquad)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**[MEMO]**

**2** 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x}$，$4x+2y=9$

(2) $y=\sqrt{3}\sin x$，$y=\cos x$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

## Point Pickup

**2曲線の間の面積**

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

# 第 20 講　PART2 確認問題

**1**　曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ で囲まれた部分の面積は，

$\boxed{ア}-\boxed{イ}\log\boxed{ウ}$ である。

**2**　$0\leqq x\leqq \pi$ における曲線 $y=\sin x$，$y=-\cos x$ および2

直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{エ}$ である。

$\boxed{エ}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{2}+1$　　④ $2\sqrt{2}+2$

# PART3 曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸の間の面積

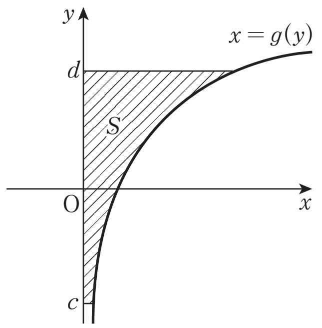
## 要点整理と公式

### 要点① 曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸の間の面積

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\int_c^d g(y)dy$$

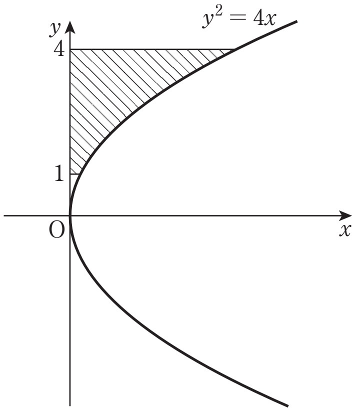
で表される。




(ex) 曲線 $y^2=4x$ と $y$ 軸，2 直線 $y=1$，$y=4$ で囲まれた部分の面積 $S$ を求める。

$y^2=4x$ より

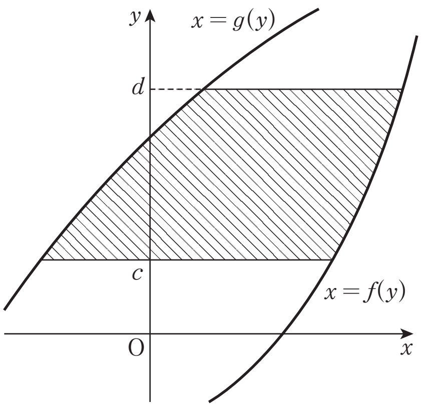
$$S=\int_1^4 \frac{1}{4}y^2\,dy=\left[\frac{1}{12}y^3\right]_1^4=\frac{21}{4}$$




区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}dy$$

で表される。



【MEMO】

**3** 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(1) $y=e^x$, $y=e$, $y=\dfrac{1}{e}$, $y$ 軸

(2) $y=\sqrt{x-1}$, $y=x-1$

## Point Pickup

**曲線と $y$ 軸の間の面積**

$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_c^d g(y)\,dy$

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \leqq 0$ のとき　$S=\displaystyle\int_c^d \{-g(y)\}\,dy=-\int_c^d g(y)\,dy$

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$, $x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$, $y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}\,dy$$

# 第20講 PART3 確認問題

**1** 曲線 $y=\log(x+1)$ と $y$ 軸および2直線 $y=1$，$y=-1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 ア

答えは下の①～④のうちから選べ。

① $e+\dfrac{1}{e}$　　② $e+\dfrac{1}{e}-1$

③ $e-\dfrac{1}{e}+2$　　④ $e+\dfrac{1}{e}-2$

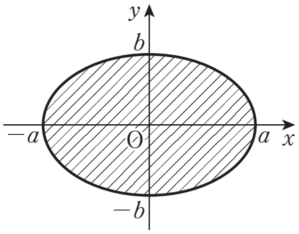
**2** 曲線 $y=\sqrt{x-2}$ と直線 $y=x-2$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

# PART4 いろいろな曲線と面積

## 要点整理と公式

### 要点 ① 曲線で囲まれた図形の面積

$a>0$，$b>0$ のとき，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた部分の面積 $S$ を求める。




$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を $y$ について解くと

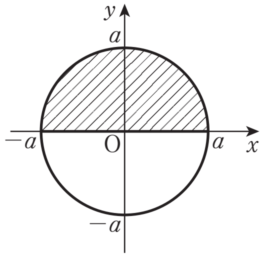
$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ は楕円の上半分を，$y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ は楕円の下半分を表している。

よって，求める面積 $S$ は

$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

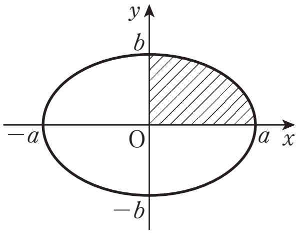
ここで，$y=\sqrt{a^2-x^2} \iff x^2+y^2=a^2$，$y\geqq 0$ であるから，$y=\sqrt{a^2-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 $a$ の円の上半分である。よって，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 $a$ の半円の面積を表す。




したがって　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\qquad=\pi ab$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，$x$ 軸および $y$ 軸に関して対称である。

よって，この楕円で囲まれた部分の面積は，右図の斜線部分（楕円の第 1 象限および $x$ 軸，$y$ 軸で囲まれた部分）の面積を 4 倍して求めることができる。すなわち




$$S=4\int_{0}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\cdot\qquad=\pi ab$$

## 要点 ② 媒介変数で表された曲線と面積

$a>0$ とする。サイクロイド

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ \ y=a(1-\cos\theta)$$

の $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求める。

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において $y\geqq 0$

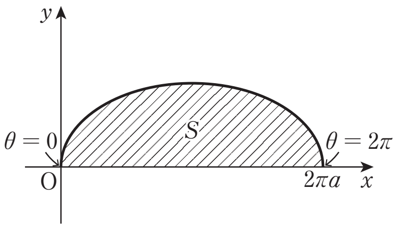
$y=0$ より $a(1-\cos\theta)=0$　　$\cos\theta=1$　　よって $\theta=0,\ 2\pi$

したがって，曲線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は $x=a(0-\sin 0),\ a(2\pi-\sin 2\pi)$

すなわち $x=0,\ 2\pi a$

$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$ より，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において $\dfrac{dx}{d\theta}\geqq 0$（等号成立は $\theta=0,\ 2\pi$ のとき）

よって，求める面積は右図斜線部分の面積で




$$S=\qquad dx$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$ より $dx=$

$x$ と $\theta$ の対応は右の通り。

| $x$ | $0\ \to\ 2\pi a$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\ \to\ 2\pi$ |

よって，　　　　　　より

$$S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\qquad\qquad\right)d\theta=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2$$

**4** (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ。

(2) 媒介変数 $\theta$ によって，$x=2\cos\theta$，$y=\sin 2\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

## Point Pickup

**曲線で囲まれた部分の面積**

陰関数 $F(x,\ y)=0$ で表された曲線で囲まれた部分の面積は，陽関数 $y=f(x)$ で表して求めるとよい。その際，対称性に注目するとよい。

**媒介変数で表された曲線と面積**

媒介変数 $t$ によって，$x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線と $x$ 軸によって囲まれる図形の面積は，媒介変数 $t$ を消去せず，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ であることを用いて，置換積分法

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

を用いて求めるとよい。$t$ の変化に伴う $x$，$y$ の増減に注意。

# 第20講 PART4 確認問題

**1** 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求める。

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を $y$ について解くと,

$$y=\pm\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウ}-x^2}$$

$f(x)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\sqrt{\boxed{ウ}-x^2}$ とおくと，$S$ は,

$$S=\boxed{エ}$$

と表されるから，この定積分を計算すると,

$$S=\boxed{オ}\pi$$

$\boxed{エ}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx$　　② $\displaystyle 2\int_{-2}^{2}f(x)dx$

③ $\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)dx$　　④ $\displaystyle 2\int_{-3}^{3}f(x)dx$

**2** 媒介変数 $\theta$ によって，$x=\sin\theta$，$y=\sin 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

で表される曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求める。

曲線と $x$ 軸との共有点の $x$ 座標は，

$x=0$，［カ］

よって，$S=\displaystyle\int_0^{\boxed{\text{カ}}} y\,dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\text{キ}}\,d\theta$

と表され，この定積分を計算すると，

$S=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$

［キ］は下の①～④のうちから選べ。

① $\sin 2\theta\sin\theta$　　② $\sin 2\theta\cos\theta$

③ $\cos 2\theta\cos\theta$　　④ $2\sin 2\theta\cos\theta$

**[MEMO]**

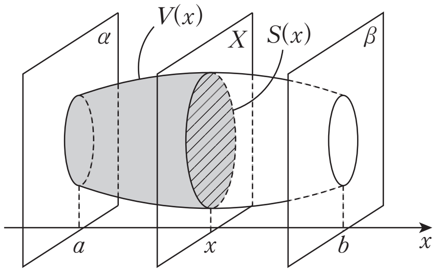
# 第21講 体積
# PART1 定積分と体積

## 要点整理と公式

### 要点① 定積分と体積

ある立体の，$x$ 軸に垂直な 2 平面 $\alpha$，$\beta$ に挟まれた部分の体積 $V$ を求める。

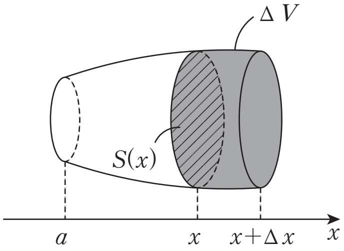
右図のように，2 平面 $\alpha$，$\beta$ が $x$ 軸と交わる点の座標をそれぞれ $a$，$b$ $(a<b)$とする。また，$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面 $X$ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とし，2 平面 $\alpha$，$X$ の間に挟まれた部分の体積を $V(x)$ とする。




$x$ の増分 $\Delta x$ に対する $V(x)$ の増分を $\Delta V$ とすると

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$$

であり，$\Delta V$ は $x$ 軸と座標 $x$，$x+\Delta x$ で交わる 2 平面の間に挟まれた部分の体積に等しい。




ここで，$\Delta x$ が十分小さいとき

$$\Delta V \fallingdotseq \qquad \times$$

すなわち $\dfrac{\Delta V}{\Delta x} \fallingdotseq S(x)$ であり，$\Delta x \to 0$ のとき

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x) \text{ つまり } \qquad = S(x)$$

である。したがって

$$\int_a^b S(x)dx = \Big[ \qquad \Big]_a^b = V(b) - V(a) = V$$

が成り立つ。以上より，次の公式が成り立つ。

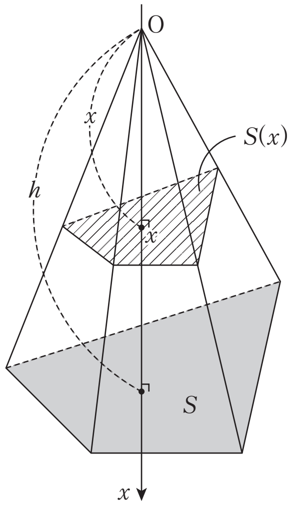
## 定積分と体積

$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $a$，$b$ で交わる平面をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とし，$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $x(a \leqq x \leqq b)$ で交わる平面 $X$ である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2 平面 $\alpha$，$\beta$ に挟まれた部分の体積 $V$ は

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (a < b)$$

(ex) 底面積が $S$，高さが $h$ の角錐の体積は，$V = \dfrac{1}{3}Sh$ で表されることを示せ。

角錐の頂点 O を原点とし，O から底面に下ろした垂線を $x$ 軸とする。$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面でこの角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。




断面の多角形と底面の多角形は相似であり，その相似比は　：　であるから，面積比は

$$S(x) : S = \quad : $$

よって　$S(x) = \dfrac{S}{h^2}x^2$

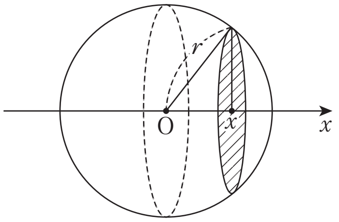
したがって，角錐の体積は

$$V = \int \qquad dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh$$

**1** 半径 $r$ の球の中心Oを原点として，$x$ 軸をとる。

(1) $x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面でこの球を切ったときの断面は円である。この円の半径を $r$ と $x$ を用いて表せ。

(2) (1)の結果を用いて，この球の体積 $V$ が $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ で表されることを示せ。

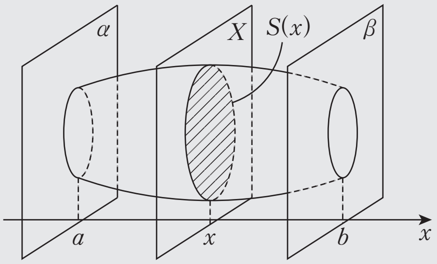



# Point Pickup

**定積分と体積**

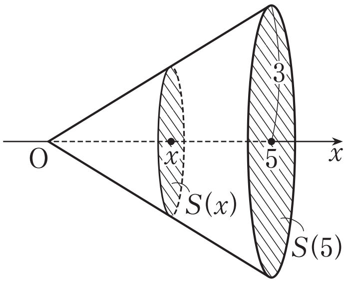
$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $a$，$b$ で交わる平面をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とし，$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面 $X$ である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2平面 $\alpha$，$\beta$ に挟まれた部分の体積 $V$ は

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (a<b)$$



# 第21講 PART1 確認問題

**1** 底面の半径が3，高さが5である円錐の体積 $V$ を，定積分を用いて求める。




円錐の頂点を原点Oとし，頂点から底面に下ろした垂線を $x$ 軸とする。

$0 \leqq x \leqq 5$ として，$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸との交点の座標が $x$ である平面でこの立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi x^2$$

よって，求める体積 $V$ は，

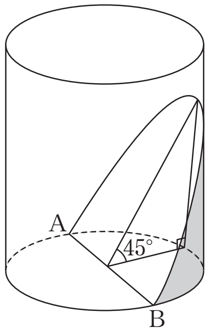
$$V = \int_0^{\boxed{\text{エ}}} S(x)dx = \boxed{\text{オカ}}\pi$$

# PART2 断面図と立体の体積

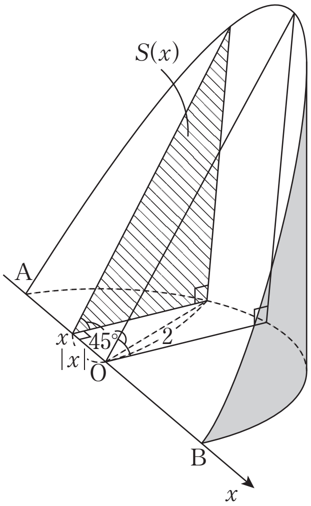
## 要点整理と公式

### 要点① 断面図と立体の体積

ある立体を適切な平面で切ったときにできる断面図の面積を用いて，体積を求める。




(ex) 底面の半径が 2，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 45° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積を求める。




底面の中心 O を原点とし，直線 AB を $x$ 軸とする。

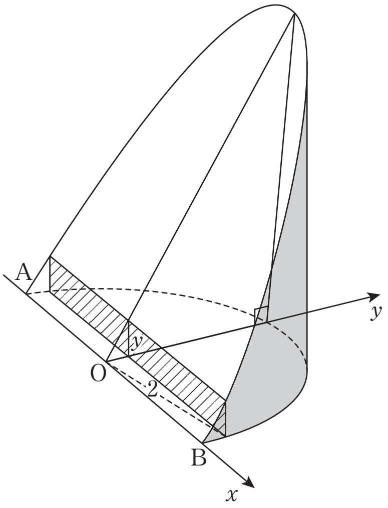
$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面で小さい方の立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}(\qquad\qquad)^2=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

よって，求める体積 $V$ は

$$V=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx=2\int_{0}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)dx$$

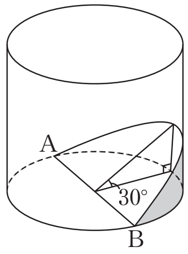
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$$




$x$ 軸に垂直な平面で切る方法以外に，右図のように $y$ 軸に垂直な平面で切る方法などがある。切り方によって，断面積を求める際や，積分で体積を求める際などの煩雑さが異なる。

**[MEMO]**

**2** 底面の半径が 3，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 30° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積 $V$ を求めよ。



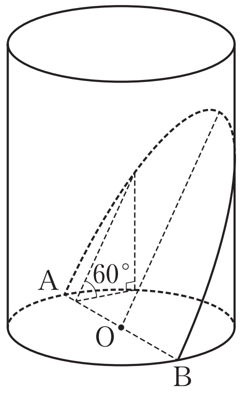

# Point Pickup

**断面図と立体の体積**

適切な座標軸を定め，その座標軸と垂直な平面で切ったときの断面積 $S(x)$ を求めることにより，立体の体積 $V$ を $V=\int_a^b S(x)dx$ によって求めることができる。

# 第21講 PART2 確認問題

**1** 底面の半径が2，高さが5の直円柱がある。この直円柱の底面の直径ABを含み，底面と60°の角をなす平面で，この直円柱を2つに分けるとき，小さい方の立体の体積 $V$ を求める。




底面の中心を原点Oとし，直線ABを $x$ 軸とする。
$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\left(\boxed{\text{ウ}}-x^2\right)$$

よって，求める体積 $V$ は，

$$V=\int_{-\boxed{\text{エ}}}^{\boxed{\text{エ}}}S(x)dx$$

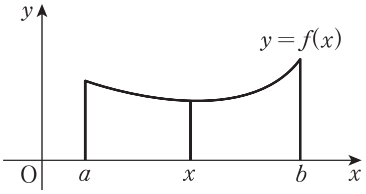
$$=\frac{\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

# PART3 $x$ 軸の周りの回転体の体積

## 要点整理と公式

### 要点 ① $x$ 軸の周りの回転体の体積

$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を，$x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V$ とする。



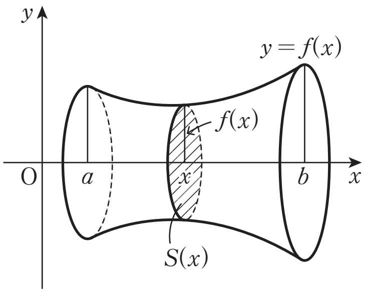

点 $(x,\ 0)$ を通り，$x$ 軸に垂直な平面による断面は　　となり，その断面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\qquad$$

となる。よって，

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \qquad dx$$

となる。したがって，次の公式が得られる。



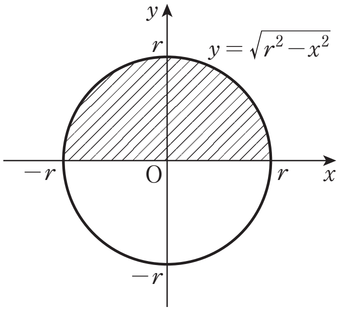

**$x$ 軸の周りの回転体の体積**

$a<b$ のとき

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

(ex) 半径 $r$ の球の体積 $V$ について

半径 $r$ の球は，半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と $x$ 軸で囲まれた部分を，$x$ 軸の周りに 1 回転してできる回転体と考えることができる。よって



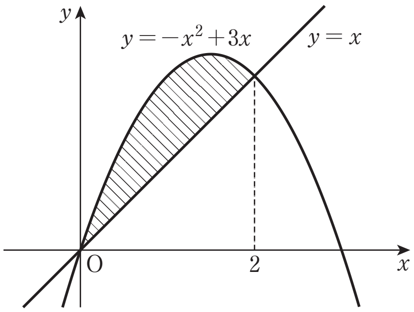

$$V=\int \qquad dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

## 要点② $x$ 軸の周りの回転体の体積（２曲線間）

放物線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに１回転してできる立体の体積 $V$ を求める。

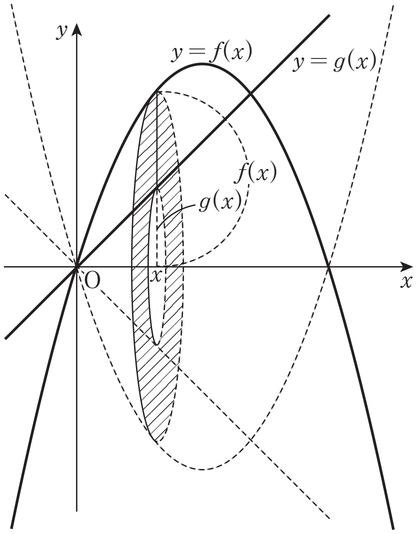



$-x^2+3x=x$ より　$x(x-2)=0$　　$x=0$，2

$0 \leqq x \leqq 2$ においては $0 \leqq x \leqq -x^2+3x$

ここで，$f(x)=-x^2+3x$，$g(x)=x$ とする。

点 $(x,\ 0)$ を通り，$x$ 軸に垂直な平面による立体の断面積を $S(x)$ とすると




$$S(x)= \qquad\qquad - $$

である。よって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^2\{f(x)\}^2\,dx-\pi\int_0^2\{g(x)\}^2\,dx$$

$$=\int_0^2\left[\qquad\qquad - \qquad\qquad\right]dx$$

$$=\pi\int_0^2\{(-x^2+3x)^2-x^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4-6x^3+8x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3\right]_0^2=\left(\frac{32}{5}-24+\frac{64}{3}\right)\pi=\frac{56}{15}\pi$$

**3** 次の曲線や直線で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 $V$ を求めよ。

(1) $y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$x$ 軸　　(2) $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

# Point Pickup

**$x$ 軸の周りの回転体の体積**

曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を，$x$ 軸の周りに1回転してできる立体の体積 $V$ は，断面が円になることに注目し

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx \qquad (a<b)$$

で求めることができる。

# 第21講 PART3 確認問題

**1** 曲線 $y=e^x$ と $x$ 軸，$y$ 軸および直線 $x=3$ で囲まれた図形を，$x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\left(e^{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

**2** 2 曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\sqrt{2x}$ で囲まれた図形を，$x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，

$$\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$$

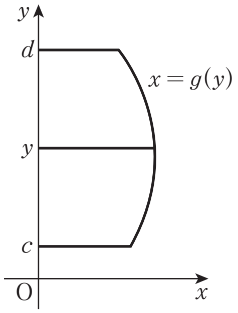
である。

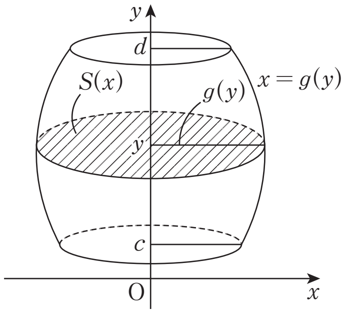
# PART4 $y$ 軸の周りの回転体の体積

## 要点整理と公式

### 要点 ① $y$ 軸の周りの回転体の体積

$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分を，$y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V$ は，$x$ 軸の周りの回転体と同様に考えて次の公式で求めることができる。




**$y$ 軸の周りの回転体の体積**

$c<d$ のとき

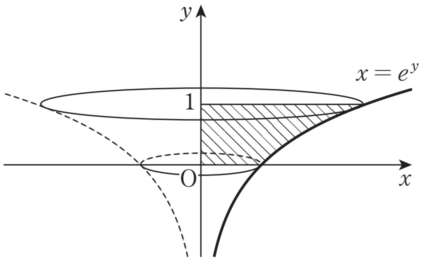
$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy$$

(ex) 曲線 $y=\log x$ と $x$ 軸，$y$ 軸および直線 $y=1$ で囲まれた図形を，$y$ 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 $V$ について

$y=\log x$ より $x=e^y$　　$x^2=e^{2y}$

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}\pi$$



**[MEMO]**

**4** 次の曲線や直線で囲まれた図形を $y$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ を求めよ。

(1) $y=x^2+1$，$y=3$　　(2) $y=-x^2+4x$，$x$ 軸

## Point Pickup

**$y$ 軸の周りの回転体の体積**

曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分を，$y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V$ は

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy \qquad (c<d)$$

# 第21講 PART4 確認問題

**1** 曲線 $y=x^2-2$ と直線 $y=4$ で囲まれた図形を，$y$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{アイ}\pi$ である。

**2** 曲線 $y=-x^2+2x$ と $x$ 軸で囲まれた図形を，$y$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$ である。

# 第22講　曲線の長さ，速度と道のり

# PART1　曲線の長さ

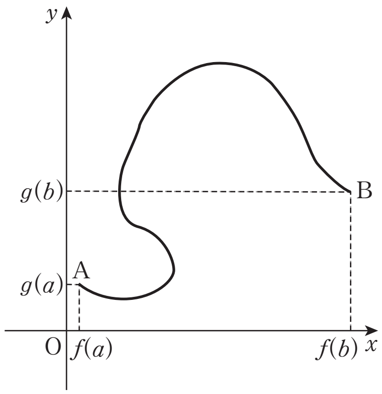
## 要点整理と公式

### 要点① 媒介変数表示された曲線の長さ

座標平面上の曲線が，媒介変数 $t$ を用いて

$$x=f(t),\ y=g(t)\qquad (a\leqq t\leqq b)$$

と表されるとき，曲線の長さ $L$ を求める。



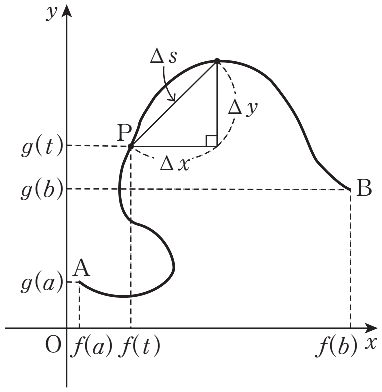

$A(f(a),\ g(a))$，$B(f(b),\ g(b))$ とし，点 A から点 $P(f(t),\ g(t))$ までの曲線の長さを $s(t)$ と表す。

$t$ の増分 $\Delta t$ に対する $x$，$y$ の増分を $\Delta x$，$\Delta y$ とすると，$\Delta t$ が十分小さい正の値のとき，$s(t)$ の増分 $\Delta s$ は

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

と考えることができる。よって

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$




$\Delta t\to 0$ のとき，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\to\dfrac{dy}{dt}$ であるから

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$$

よって，$s(t)$ は $t$ の関数 $\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$ の不定積分の 1 つであるから，点 A から点 B までの曲線の長さ $L$ は，定積分を用いて次のように表される。

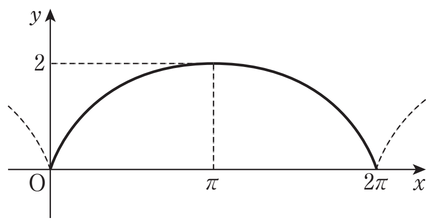
**媒介変数表示された曲線の長さ**

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)\qquad (a\leqq t\leqq b)$ の長さを $L$ とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(ex) サイクロイド $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$の長さ $L$ を求める。

$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ より




$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t$$
$$=2-2\cos t=2(1-\cos t)$$
$$=4\cdot\frac{1-\cos t}{2}=4\sin^2\frac{t}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$0\leqq\dfrac{t}{2}\leqq\pi$ より $\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$　　よって　$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8$

## 要点 ② 曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線の方程式が $y=f(x)$　$(a\leqq x\leqq b)$で表されているときの曲線の長さ $L$ は

$x=$　，$y=f($　$)$　$(a\leqq t\leqq b)$

とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=$　，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{}\cdot\dfrac{}{dt}=\dfrac{dy}{dx}=$　　より，次のように表される。

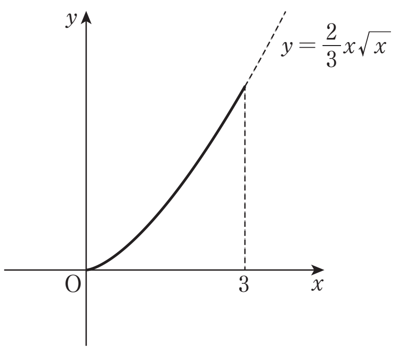
### 曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$　$(a\leqq x\leqq b)$の長さを $L$ とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(ex) 曲線 $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$　$(0\leqq x\leqq 3)$の長さ $L$ を求める。

$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$




$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+(\sqrt{x})^2=1+x$$

$$L=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{3}$$

**1** (1) アステロイド $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さを求めよ。

(2) カテナリー $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の長さを求めよ。

## Point Pickup

**媒介変数表示された曲線の長さ**

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さを $L$ とすると

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

**曲線 $y=f(x)$ の長さ**

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さを $L$ とすると

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

# 第22講 PART1 確認問題

**1** 次の曲線の長さを $L$ とする。

$x=t-\sin t,\ y=\cos t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

このとき，$L=\int_0^{2\pi}$ $\boxed{\text{ア}}$ $dt$ と表される。

よって，$L=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sin t$　② $\sin\frac{t}{2}$

③ $2\sin\frac{t}{2}$　④ $2\cos\frac{t}{2}$

**2** 曲線 $y=2x^{\frac{3}{2}}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$ の長さを $L$ とすると，

$L=\int_0^{\frac{1}{3}}$ $\boxed{\text{ウ}}$ $dx$ と表される。

よって，$L=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $1+3x$　② $1+9x$

③ $\sqrt{1+3x}$　④ $\sqrt{1+9x}$

# PART2 速度と道のり

## 要点整理と公式

### 要点 ① 数直線上を運動する点の速度と道のり

数直線上を運動する点Pの，時刻 $t$ における座標を $x=f(t)$，速度 $v$ とすると，

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

と表される。よって，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの位置の変化量は

$$f(b)-f(a)=\left[f(t)\right]_a^b=\int_a^b f'(t)dt=\int_a^b vdt$$

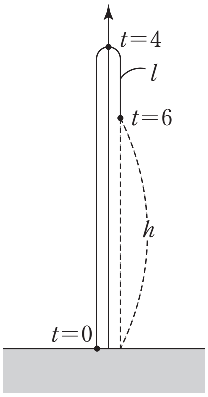
で求めることができる。

$t=a$ から $t=b$ までに点Pが移動した距離，すなわち「　　　」を $l$ とすると

$$l=\int_a^b v\ dt$$

である。$|v|$ は速度 $v$ の絶対値，すなわち速さである。

(ex) 時刻 $t$ における速度が $v=40-10t$ (m/s) となるように地上から真上に打ち上げられた物体の，6秒後の高さを $h$，物体が動いた道のりを $l$ とすると




$$h=\int_0^6 vdt=\int_0^6(40-10t)dt$$

$$=\left[40t-5t^2\right]_0^6=60\ (\text{m})$$

$0\leqq t\leqq$　のとき $v\geqq 0$

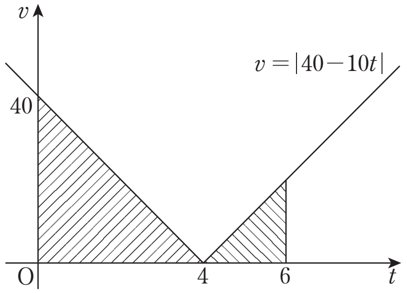
　$\leqq t\leqq 6$ のとき $v\leqq 0$

$$l=\int_0^6|v|dt=\int_0^4(40-10t)dt+\int_4^6(-40+10t)dt$$

$$=\left[40t-5t^2\right]_0^4+\left[-40t+5t^2\right]_4^6$$

$$=80+20=100\ (\text{m})$$

道のり $l$ は，右図斜線部分2ヶ所の和に等しい。



## 要点② 平面上を運動する点の速度と道のり

座標平面上で，曲線 $C$ 上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

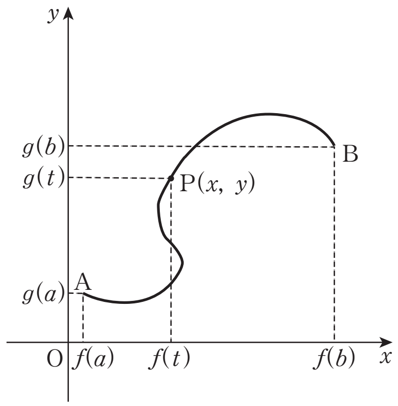
$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表されるとする。$t=a$ から $t=b$ までの点Pの道のり $l$ は，点 $\mathrm{A}(f(a),\ g(a))$ から点 $\mathrm{B}(f(b),\ g(b))$ までの曲線の長さに等しい。

よって，曲線の長さの公式より

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

である。




点Pの速度を $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と表すと，点Pの速度の大きさ，すなわち速さは

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

であるから，道のり $l$ は次のように表される。

$$l=\int_a^b|\vec{v}|\,dt$$

(ex) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\qquad (r>0)$$

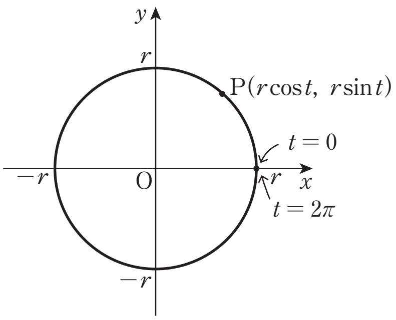
と表されているとき，点Pが時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ までに動く道のりを $l$ とすると

$\dfrac{dx}{dt}=-r\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=r\cos t$ より

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi}r\,dt=[rt]_0^{2\pi}=2\pi r$$



**2** (1) 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\cos t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量 $s$, および点Pの通過する道のり $l$ を求めよ。

(2) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=\dfrac{1}{2}t^2$，$y=\dfrac{1}{3}t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの点Pの動く道のり $l$ を求めよ。

## Point Pickup

**直線上を運動する点の道のり**

数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とすると，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は

$$l=\int_a^b|v|dt$$

**平面上を運動する点の道のり**

座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表されるとき，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b|\vec{v}|dt$$

# 第22講 PART2 確認問題

**1** 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\sin t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量を $s$，点Pの通過する道のりを $l$ とすると，

$$s=\boxed{\text{ア}},\quad l=\boxed{\text{イ}}$$

である。

**2** 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=t^3$，$y=3t^2$ で表されるとき，$t=0$ から $t=1$ までの点Pの動く道のりを $l$ とすると，

$$l=\int_0^1 \boxed{\text{ウ}}\,dt$$

と表される。

よって，$l=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{t^2+4}$　② $t\sqrt{t+3}$

③ $t\sqrt{t^2+4}$　④ $3t\sqrt{t^2+4}$

# 第 1 講　いろいろな関数

## PART1 分数関数

**1** (1) 次の関数のグラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

(i) $y=\dfrac{1}{x-1}$　　(ii) $y=-\dfrac{4}{x}+3$

(iii) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$　　(iv) $y=\dfrac{3-2x}{x-2}$

(2)(i) 関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求めよ。

(ii) 不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ を解け。

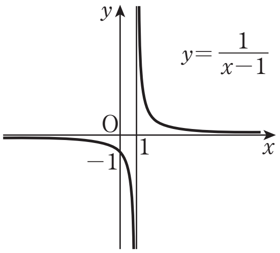
---

**[解答]**

(1)(i) 求めるグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=1$, $y=0$

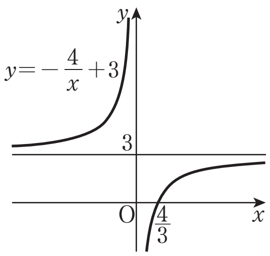
グラフは右図




(ii) 求めるグラフは $y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフを $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=0$, $y=3$

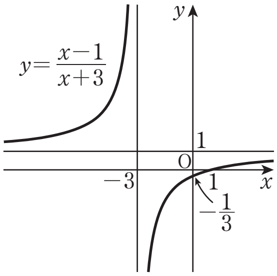
グラフは右図



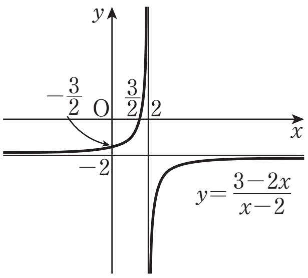

(iii) $y=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1\cdot(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+1$

よって，求めるグラフは $y=-\dfrac{4}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-3$, $y$ 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-3$, $y=1$



(iv)　$y=\dfrac{3-2x}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-2$




よって，求めるグラフは $y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを

$x$ 軸方向に 2，$y$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動した

直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=2$，$y=-2$

(2)(i)　関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x+1$ の共有点の $x$ 座標は，

方程式 $\dfrac{4x-6}{x-2}=x+1$ の解である。

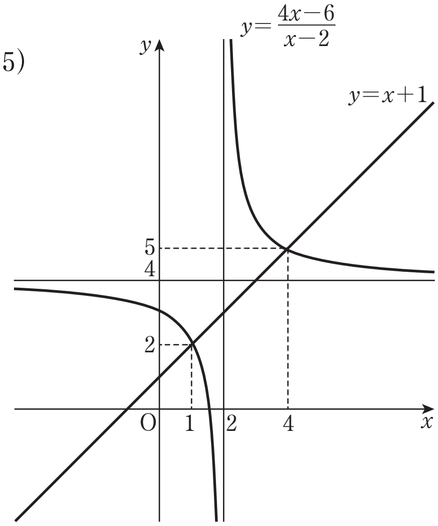
$4x-6=(x+1)(x-2)$

$x^2-5x+4=0$　　　　　よって $x=1$，4

$x=1$ のとき $y=2$　　$x=4$ のとき $y=5$

したがって，求める共有点の座標は　(1，2)，(4，5)

(ii)　不等式 $\dfrac{4x-6}{x-2}>x+1$ ……　①の解は，




関数 $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$ のグラフが直線

$y=x+1$ より上側にある $x$ の値の

範囲である。

$y=\dfrac{4x-6}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+4$ のグラフ

および $y=x+1$ のグラフは，(i)より右図。

この図より，不等式①の解は

$x<1$，$2<x<4$

# PART2 無理関数

**2** (1) 次の関数のグラフをかけ。

(i) $y=\sqrt{2x}$　　(ii) $y=-\sqrt{2x}$

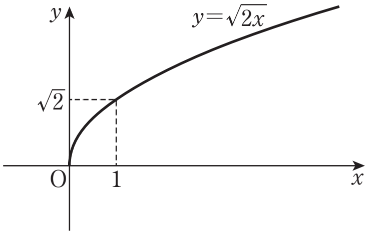
(iii) $y=\sqrt{-2x}$　　(iv) $y=-\sqrt{-2x}$

(2)(i) 関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

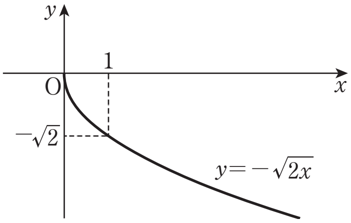
(ii) 不等式 $\sqrt{2x+3}>x$ を解け。

**[解答]**

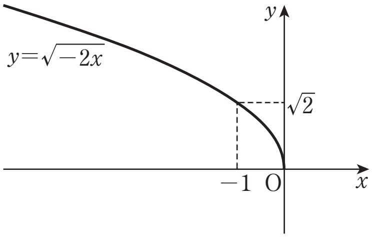
(1)(i)



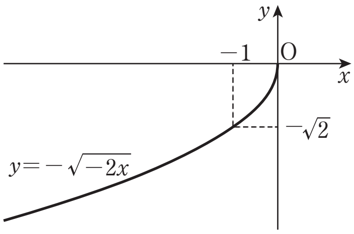

(ii)




(iii)




(iv)




(2)(i) 関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の $x$ 座標は,

方程式 $\sqrt{2x+3}=x$ ……①の解である。

①の両辺を 2 乗すると

$$2x+3=x^2$$

$$x^2-2x-3=0$$　　よって $x=-1,\ 3$

$x=-1$ のとき ①において (左辺)$=1$, (右辺)$=-1$ より不適

$x=3$ のとき　①の両辺の値は 3

したがって，求める共有点の座標は $(3,\ 3)$

(ii)　不等式 $\sqrt{2x+3}>x$　……②の解は，

関数 $y=\sqrt{2x+3}$ のグラフが直線

$y=x$ より上側にある $x$ の値の範囲

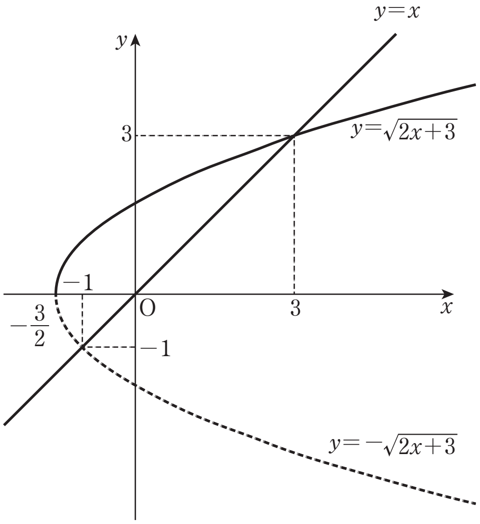
である。

$y=\sqrt{2x+3}=\sqrt{2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}$ のグラフ

および $y=x$ のグラフは，(i)より右図。

この図より，不等式②の解は

$$-\frac{3}{2}\leqq x<3$$



# PART3 逆関数

**3** (1) 次の関数の逆関数を求めよ。また，それぞれの関数のグラフとその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(i) $y=3x-6\ (1\leqq x\leqq 2)$　　(ii) $y=\sqrt{2-x}$

(iii) $y=4^x$　　(iv) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

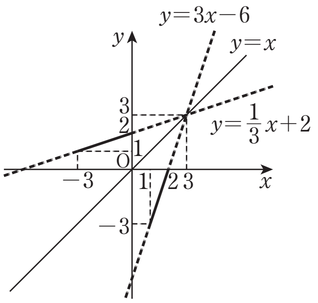
(2) 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ の逆関数を求めよ。

**[解答]**

(1)(i) この関数の値域は $-3\leqq y\leqq 0$

$y=3x-6$ を $x$ について解くと $x=\dfrac{1}{3}y+2$

よって，逆関数は $y=\dfrac{1}{3}x+2$　$(-3\leqq x\leqq 0)$

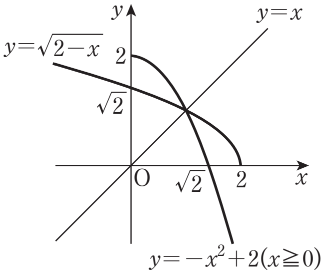



(ii) この関数の値域は $y\geqq 0$

$y=\sqrt{2-x}$ を $x$ について解くと $y^2=2-x$ より

$x=-y^2+2$

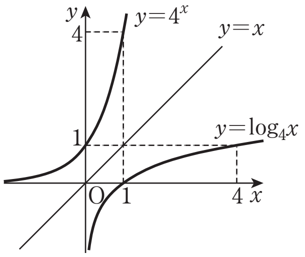
よって，逆関数は $y=-x^2+2$　$(x\geqq 0)$




(iii) この関数の値域は $y>0$

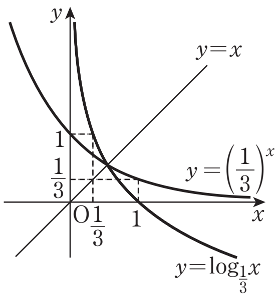
$y=4^x$ を $x$ について解くと $x=\log_4 y$

よって，逆関数は $y=\log_4 x$



(iv)　$y=\log_{\frac{1}{3}}x$ を $x$ について解くと $x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^y$

よって，逆関数は $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$




(2)　$y=\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-3}{x-1}=-\dfrac{3}{x-1}+2$

よって，この関数の値域は $y\neq 2$

$y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ より $(x-1)y=2x-5$　　$(y-2)x=y-5$

$y\neq 2$ より $x=\dfrac{y-5}{y-2}$

よって，逆関数は $y=\dfrac{x-5}{x-2}$

# PART4 合成関数

**4** 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$

(3) $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$

**[解答]**

(1) $f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じであるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x-1)^2+3=4x^2-4x+4$$

$g(x)$ の値域は 3 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2+3)-1=2x^2+5$$

(2) $f(x)$ の値域は 0 より大きい実数全体で，$g(x)$ の定義域 $(x>0)$ と同じであるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2 2^x=x$$

$g(x)$ の値域は実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)と同じであるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2^{\log_2 x}=x$$

$g(x)$ の定義域は $x>0$ であるから　$(f\circ g)(x)=x$　$(x>0)$

(3) $f(x)$ の値域は $-1$ 以上 1 以下の実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$$

$g(x)$ の値域は 0 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれるから

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sin x^2$$

# 第 2 講　数列の極限

# PART1 数列の極限

**1** (1) 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\dfrac{5}{n^2}$　(ii) $-\dfrac{2}{n}$　(iii) $3n$

(iv) $-\sqrt{n}$　(v) $2^n$　(vi) $(-3)^{n-1}$

(2) 次の極限値を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$

---

**[解答]**

(1)(i) $\dfrac{5}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{5}{9}$, ……, $\dfrac{5}{n^2}$, ……より　0 に収束

(ii) $-\dfrac{2}{1}$, $-\dfrac{2}{2}$, $-\dfrac{2}{3}$, ……, $-\dfrac{2}{n}$, ……より　0 に収束

(iii) 3, 6, 9, ……, $3n$, ……より　正の無限大に発散

(iv) $-\sqrt{1}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, ……, $-\sqrt{n}$, ……より　負の無限大に発散

(v) 2, 4, 8, ……, $2^n$, ……より　正の無限大に発散

(vi) 1, $-3$, 9, ……, $(-3)^{n-1}$, ……より　振動

(2)(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=1+0=1$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2-0=2$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5+0}{2-0}=\frac{5}{2}$

# PART2 不定形の極限

**2** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$　　(ii) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}$　　(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}$　　(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}$

---

**[解答]**

(1)(i) $\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)=\infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n^2}-4\right)=-\infty$

(2)(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}}=0$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-n}{\frac{1}{n^2}-4}=\infty$

# PART3 無理式の極限

**3** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

**[解答]**

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(n+2)-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{3}=\infty$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)\times\frac{1}{n}}{\sqrt{3n^2+1}\times\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-n}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=0$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

# PART4 数列の大小関係と極限

**4** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

**[解答]**

(1) $-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq 1$ より $-\dfrac{1}{2n}\leqq\dfrac{1}{2n}\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq\dfrac{1}{2n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{n\pi}{6}=0$

(2) $-1\leqq\cos n\theta\leqq 1$ より $0\leqq\cos^2 n\theta\leqq 1$　よって $0\leqq\dfrac{1}{n+1}\cos^2 n\theta\leqq\dfrac{1}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos^2 n\theta=0$

(3) $-1\leqq(-1)^n\leqq 1$ より $-\dfrac{1}{n^2}\leqq\dfrac{(-1)^n}{n^2}\leqq\dfrac{1}{n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$

# 第 3 講　無限等比数列の極限

## PART1　無限等比数列の極限と収束条件

**1**　(1)　第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　　(ii) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$　　(iii) $(-2)^n$　　(iv) $-2\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

(2)　次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)$　　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}$

(3)　数列 $\{(3x)^n\}$ が収束するような $x$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

---

**[解答]**

(1)(i) $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$　よって 0 に収束する

(ii) $\dfrac{5}{4}>1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=\infty$　よって正の無限大に発散する

(iii) $-2<-1$ より，この数列は振動し，極限はない。

(iv) $\left|\dfrac{-3}{5}\right|<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}=-2\cdot 0=0$　よって 0 に収束する

(2)(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5^n}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

(3)　数列 $\{(3x)^n\}$ は，公比 $3x$ の等比数列より，この数列が収束するための条件は

$-1<3x\leqq 1$　　よって $-\dfrac{1}{3}<x\leqq\dfrac{1}{3}$

極限値は

$-1<3x<1$　すなわち $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$ のとき 0

$3x=1$　すなわち $x=\dfrac{1}{3}$ のとき 1

# PART2 漸化式と極限

**2** 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1) $a_1=6$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+3$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+6$

**[解答]**

(1) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+3$ ……①の $a_{n+1}$，$a_n$ を $\alpha$ におき換えた方程式 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\alpha+3$ を解くと，$\alpha=2$

よって，$2=-\dfrac{1}{2}\cdot2+3$ ……②

① − ②より

$$a_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(a_n-2) \qquad \text{また } a_1-2=6-2=4$$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 4，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって $a_n-2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに $a_n=2+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

(2) $a_{n+1}=4a_n+6$ ……①の $a_{n+1}$，$a_n$ を $\alpha$ におき換えた方程式 $\alpha=4\alpha+6$ を解くと，$\alpha=-2$

よって，$-2=4\cdot(-2)+6$ ……②

① − ②より

$$a_{n+1}+2=4(a_n+2) \qquad \text{また } a_1+2=1+2=3$$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 3，公比 4 の等比数列である。

したがって $a_n+2=3\cdot4^{n-1}$　　ゆえに $a_n=-2+3\cdot4^{n-1}$

$4>1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}4^{n-1}=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

# 第 4 講　無限級数

## PART1　無限級数の収束と発散

**1**　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$

---

**[解答]**

(1)　$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ と変形できるから，第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{-2}=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})$

第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2)+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\cdots\cdots+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})\}$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})\right\}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

# PART2 無限等比級数の収束と発散

**2** (1) 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

(i) $-2+3-\dfrac{9}{2}+\cdots\cdots$　　(ii) $(3+\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2) 次の無限等比級数が収束するような $x$ の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots\cdots$$

---

**[解答]**

(1)(i) 初項は $-2$，公比は $-\dfrac{3}{2}$ で，$\left|-\dfrac{3}{2}\right|\geqq 1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(ii) 初項は $3+\sqrt{2}$，公比は $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{7-7\sqrt{2}}{7}=1-\sqrt{2}$ で，

$|1-\sqrt{2}|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{3+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

(2) 初項は $x$，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための条件は

$x=0$　または　$-1<1-x<1$

$-1<1-x<1$　より　$-2<-x<0$　つまり　$0<x<2$

よって，求める $x$ の範囲は $0\leqq x<2$

また，求める和は

$x=0$ のとき　$0$　　　$0<x<2$ のとき　$\dfrac{x}{1-(1-x)}=1$

# PART3 無限級数と数列の一般項，無限級数の性質

**3** (1) 無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}$ の和を求めよ。

**[解答]**

(1) 与えられた無限級数の第 $n$ 項を $a_n$ とすると，$a_n=\frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

よって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，無限級数 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$ は発散する。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{3}{4}$，公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{3}{4}\right|<1$，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ はともに収束し，その和はそれぞれ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

よって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2}{4^n}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

# 第 5 講　関数の極限

# PART1 関数の極限

**1** (1)　次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-2x+5)$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+4}{x-1}$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to5}\sqrt{2x-1}$

(2)　次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$

---

**[解答]**

(1)(i) $$\lim_{x\to2}(x^2-2x+5)=2^2-2\cdot2+5=5$$

(ii) $$\lim_{x\to-1}\frac{3x+4}{x-1}=\frac{3\cdot(-1)+4}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

(iii) $$\lim_{x\to5}\sqrt{2x-1}=\sqrt{2\cdot5-1}=\sqrt{9}=3$$

(2)(i) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{2x+3}=\frac{3}{5}$$

(ii) $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2(x+2)-4}{x+2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{x+2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x+2}=1$$

(iii) $$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(\sqrt{x+7}-2)(\sqrt{x+7}+2)}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+7)-4}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{\sqrt{x+7}+2}=\frac{1}{4}$$

# PART2　極限値の条件による関数の決定

**2**　等式 $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$ が成り立つように，定数 $a$，$b$ の値を求めよ。

**[解答]**

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，等式　$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4$　……①の左辺が収束するためには

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$　すなわち　$1+a+b=0$　より　$b=-a-1$　……②であることが必要である。このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

より，①の左辺は $a+2$ に収束する。

①より　$a+2=4$　　よって　$a=2$　　　このとき②より　$b=-3$

したがって，$a=2$，$b=-3$

# PART3　±∞に発散，右極限と左極限

**3**　(1)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$　(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

(2)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{|x+1|}{x+1}$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$

**[解答]**

(1)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\infty$　(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=-\infty$

(2)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x+1}{x+1}=1$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=\infty$　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=-\infty$

# PART4　$x\to\pm\infty$ のときの極限，指数・対数関数の極限

**4**　(1)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)$

(2)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$　　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)$

(3)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

---

**[解答]**

(1)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right)=3$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=-\infty$

(2)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=0$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$$

(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}+x)(\sqrt{x^2+3x+1}-x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\frac{3}{2}$$

（別解）　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right)\left(\sqrt{t^2-3t+1}+t\right)}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t+1)-t^2}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+1}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-\frac{3}{2}$$

(3)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$

(ii)　$x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$　　　よって $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\infty$

（別解）　$\log_2\dfrac{1}{x}=\log_2 x^{-1}$

$$=-\log_2 x$$

$$\lim_{x\to+0}(-\log_2 x)=\infty$$

# 第 6 講　三角関数の極限，関数の連続

## PART1 三角関数の極限

**1**　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

**[解答]**

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2}=\frac{1\cdot3}{1\cdot2}=\frac{3}{2}$$

(別解)　(1)の結果より

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot4\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}=1^2\cdot4\cdot\frac{1}{1+1}=2$$

(別解) $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ より $1-\cos 2x=2\sin^2 x$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1^2=2$

# PART2 おき換え，はさみうちによる三角関数の極限

**2** (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x}$

**[解答]**

(1)(i) $\dfrac{1}{3x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき $t=+0$

また $x=\dfrac{1}{3t}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{3t}\sin t=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$

また $x=t+\dfrac{\pi}{2}$，$2x-\pi=2t$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

(2)(i) $-1\leqq\cos\dfrac{1}{x}\leqq 1$ より

$x\neq 0$ のとき $-x^2\leqq x^2\cos\dfrac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(別解)

$0\leqq\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より $0\leqq|x^2|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$　　つまり $0\leqq\left|x^2\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x^2|=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$　　したがって $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(ii)　$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より $-1 \leqq -\sin x \leqq 1$　　　$0 \leqq 1-\sin x \leqq 2$

よって $0 \leqq |1-\sin x| \leqq 2$

したがって $x \neq 0$ のとき $0 \leqq \left|\dfrac{1}{x}\right||1-\sin x| \leqq 2\left|\dfrac{1}{x}\right|$　つまり $0 \leqq \left|\dfrac{1-\sin x}{x}\right| \leqq \left|\dfrac{2}{x}\right|$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{2}{x}\right| = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1-\sin x}{x}\right| = 0$　　したがって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x} = 0$

# PART3 関数の連続

**3** 次の関数 $f(x)$ が与えられた $x$ の値で連続であるか不連続であるか調べよ。

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ ( $x=0$ )

(2) $f(x)=\sqrt{2-x}$ ( $x=2$ )

(3) $f(x)=x[x]$ ( $x=1$ )

**[解答]**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2+2}=0$，$f(0)=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ より，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $f(x)$ の定義域は $x\leqq 2$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}\sqrt{2-x}=0$，$f(2)=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$ より，$f(x)$ は $x=2$ で連続である。

(3) $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$，$1\leqq x<2$ のとき $[x]=1$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x[x]=1\cdot 0=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}x[x]=1\cdot 1=1$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$ は存在せず，$f(x)$ は $x=1$ で不連続である。

# PART4 中間値の定理

**4** 方程式 $\cos x = 2x$ は, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

---

**[解答]**

$f(x) = \cos x - 2x$ とおく。

$f(x)$ は閉区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続であり

$$f(0) = \cos 0 - 2\cdot 0 = 1 > 0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi < 0$$

であるから，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $\cos x = 2x$ は，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ

# 第 7 講　微分係数と導関数

## PART1 微分係数と微分可能

**1** (1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(3,\ \sqrt{3})$ における接線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではないことを示せ。

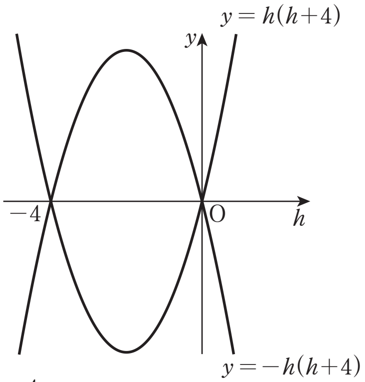
**[解答]**

(1)
$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

よって，求める接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(2) 微分係数 $f'(2)$ が存在しないことを示す。

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|(2+h)^2-4|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+4h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h(h+4)|}{h}$$




ここで

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h(h+4)|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to +0}(h+4)=4$$
$$\lim_{h\to -0}\frac{|h(h+4)|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+4)}{h}=\lim_{h\to -0}(-h-4)=-4$$

より，右極限と左極限が一致しないので，微分係数 $f'(2)$ は存在しない。

したがって，関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能ではない。

# PART2 導関数

**2** 次の関数を，導関数の定義にしたがって微分せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　　(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

**[解答]**

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2hx-h^2}{(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)-1\}-(2x-1)}{h\{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

# PART3 導関数の公式，積の導関数

**3** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^4-3x^2+5$

(2) $y=2x^5-3x^3+x$

(3) $y=(2x+1)(3x^2-x+2)$

(4) $y=(x^2-3)(x^2+x+1)$

**[解答]**

(1) $y'=4x^3-6x$

(2) $y'=10x^4-9x^2+1$

(3) $y'=(2x+1)'(3x^2-x+2)+(2x+1)(3x^2-x+2)'$

$=2(3x^2-x+2)+(2x+1)(6x-1)$

$=18x^2+2x+3$

(4) $y'=(x^2-3)'(x^2+x+1)+(x^2-3)(x^2+x+1)'$

$=2x(x^2+x+1)+(x^2-3)(2x+1)$

$=4x^3+3x^2-4x-3$

# PART4 商の導関数，$x^n$ の導関数

**4** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x+3}$

(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^3}$

(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}$

**[解答]**

(1) $y'=-\dfrac{(2x+3)'}{(2x+3)^2}=-\dfrac{2}{(2x+3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

(3) $y'=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ より

$y'=(x)'+(x^{-1})'+(-x^{-2})'=1-x^{-2}+2x^{-3}=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$

# 第 8 講　合成関数の微分法，逆関数の微分法

## PART1　合成関数の微分法

**1**　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x^2-x)^5$　　(2)　$y=(1-3x^2)^4$　　(3)　$y=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

**[解答]**

(1)　$y'=5(3x^2-x)^4\cdot(3x^2-x)'=5(3x^2-x)^4(6x-1)$

(2)　$y'=4(1-3x^2)^3\cdot(1-3x^2)'=4(1-3x^2)^3(-6x)=-24x(1-3x^2)^3$

(3)　$y=(x^2+1)^{-2}$ より

$$y'=-2(x^2+1)^{-3}\cdot(x^2+1)'=-\frac{2}{(x^2+1)^3}\cdot 2x=-\frac{4x}{(x^2+1)^3}$$

(参考)商の微分の公式を用いると

$$y'=-\frac{\{(x^2+1)^2\}'}{\{(x^2+1)^2\}^2}=-\frac{2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=-\frac{2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=-\frac{4x}{(x^2+1)^3}$$

# PART2 逆関数の微分法，$x^r$ の導関数

**2** (1) 逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[3]{x}$ を微分せよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y=\sqrt[5]{x^2}$　　(ii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　(iii) $y=\sqrt{2x+3}$

**[解答]**

(1) $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ より $x=y^3$　　$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2)(i) $y'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

(ii) $y'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\left(=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

(iii) $y'=\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+3)'=\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

# 第 9 講 三角・指数・対数関数の導関数，高次導関数

## PART1 三角関数の導関数

**1** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $y=\cos^3 x$

(3) $y=\dfrac{1}{\tan x}$ (4) $y=\sin x\cos x$

---

**[解答]**

(1) $y'=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)'=3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=-3\cos^2 x\sin x$

(3) $y'=-\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\dfrac{1}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(4) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

（別解）$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ より $y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

# PART2 対数関数の導関数

**2** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(x^2-1)$

(2) $y=\log_3|2x|$

(3) $y=\log|\cos x|$

(4) $y=x\log x$

**[解答]**

(1) $y'=\dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

(2) $y'=\dfrac{(2x)'}{2x\log 3}=\dfrac{2}{2x\log 3}=\dfrac{1}{x\log 3}$

(3) $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(4) $y'=(x)'\log x+x(\log x)'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

# PART3 指数関数の導関数，対数微分法

**3** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-x^2}$　　(2) $y=x\cdot 3^x$

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$　　(4) $y=x^{\log x}$

**[解答]**

(1) $y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

(2) $y'=(x)'3^x+x(3^x)'=3^x+x\cdot 3^x\log 3=(1+x\log 3)\cdot 3^x$

(3) $y'=\dfrac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

(4) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log x^{\log x}=(\log x)^2$$

両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{y'}{y}=2\log x\cdot(\log x)'=2\log x\cdot\frac{1}{x}$$

よって $y'=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x^{\log x}=2x^{\log x-1}\log x$

# PART4 高次導関数

**4** 次の関数の第 4 次までの導関数を求めよ。

(1) $y=\sin x$　　(2) $y=e^{-x}$

**[解答]**

(1) $y=\sin x$，$y'=\cos x$，$y''-\sin x$，$y'''=-\cos x$，$y^{(4)}=\sin x$

(2) $y=e^{-x}$，$y'=e^{-x}\cdot(-x)'=-e^{-x}$，$y''=-e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}$，

$y'''=e^{-x}\cdot(-x)'=-e^{-x}$，$y^{(4)}=-e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}$

# 第10講　接線と法線の方程式

## PART1　接線と法線の方程式

**1**　(1)　次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(i)　$y=\dfrac{1}{x+2}$，A$(-1,\ 1)$　　(ii)　$y=-\sqrt{2x+3}$，A$(0,\ -\sqrt{3})$

(iii)　$y=\cos x$，A$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　(iv)　$y=\log x$，A$\left(\dfrac{1}{e},\ -1\right)$

(2)　原点から曲線 $y=e^{2x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

**[解答]**

(1)(i)　$y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ より　$x=-1$ のとき　$y'=-1$

よって，接線の方程式は $y=-1\cdot(x+1)+1$　すなわち　$y=-x$

法線の方程式は $y=1\cdot(x+1)+1$　すなわち　$y=x+2$

(ii)　$y'=-\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=-\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ より　$x=0$ のとき　$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，接線の方程式は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}$

法線の方程式は $y=\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}$

(iii)　$y'=-\sin x$ より　$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，接線の方程式は $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+\dfrac{1}{2}$

法線の方程式は $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}$

(iv)　$y'=\dfrac{1}{x}$ より　$x=\dfrac{1}{e}$ のとき　$y'=e$

よって，接線の方程式は $y=e\left(x-\dfrac{1}{e}\right)-1$　すなわち　$y=ex-2$

法線の方程式は $y=-\dfrac{1}{e}\left(x-\dfrac{1}{e}\right)-1$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e^2}-1$

(2)　$y=e^{2x}$ より $y'=2e^{2x}$

接点の座標を $(a,\ e^{2a})$ とすると，接線の方程式は

$y=2e^{2a}(x-a)+e^{2a}$　すなわち　$y=2e^{2a}x-2ae^{2a}+e^{2a}$　……　①

①が $(0,\ 0)$ を通るので

$0=-2ae^{2a}+e^{2a}$

$e^{2a}>0$ より　$2a=1$　　$a=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は，①より $y=2ex$

# PART2 いろいろな曲線の接線の方程式

**2** (1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式および法線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \end{cases}$ において，$t=-\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

**[解答]**

(1)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$ の両辺を $x$ で微分すると

$$\frac{2x}{2}-\frac{2y}{3}\cdot y'=0 \qquad y\neq 0 \text{ のとき } y'=\frac{3x}{2y}$$

よって，点 $(-2,\ 3)$ における接線の傾きは $\dfrac{3\cdot(-2)}{2\cdot 3}=-1$

したがって，求める接線の方程式は

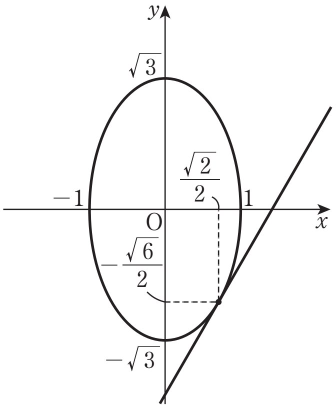
$y=-(x+2)+3$　すなわち　$y=-x+1$

また，$(-2,\ 3)$ における法線の傾きは 1

したがって，求める法線の方程式は

$y=1\cdot(x+2)+3$　すなわち　$y=x+5$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$ より




$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sqrt{3}\cos t}{-\sin t}=-\frac{\sqrt{3}\cos t}{\sin t}$$

よって，$t=-\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$$

また，接点の座標は $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ より $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

したがって，求める接線の方程式は

$$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad y=\sqrt{3}\,x-\sqrt{6}$$

# PART3 平均値の定理

**3** (1) 次の関数 $f(x)$ と区間について，平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす $c$ の値を求めよ。

(i) $f(x)=x^3+2x$，$[-2,\ 1]$　　(ii) $y=\sqrt{x}$，$[4,\ 9]$

(2) 平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

---

**[解答]**

(1)(i) $f(x)$ は区間 $[-2,\ 1]$ で微分可能で，$f'(x)=3x^2+2$

また，$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{3-(-12)}{3}=5$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$$

を満たす $c$ の値は，$3c^2+2=5$ より $c^2=1$　　$c=\pm1$

このうち $-2<c<1$ を満たすのは $c=-1$

(ii) $f(x)$ は区間 $[4,\ 9]$ で微分可能で，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

また，$\dfrac{f(9)-f(4)}{9-4}=\dfrac{3-2}{5}=\dfrac{1}{5}$

よって，平均値の定理

$$\frac{f(9)-f(4)}{9-4}=f'(c)$$

を満たす $c$ の値は，$\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{1}{5}$ より $\sqrt{c}=\dfrac{5}{2}$　　$c=\dfrac{25}{4}$

(2) $f(x)=x\log x$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \cdots\cdots\ ①,\quad a<c<b\ \cdots\cdots\ ②$$

を満たす実数 $c$ が存在する。

$f'(x)=\log x+1$ より，$f'(c)=\log c+1$　　よって，①より　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\log c+1$

②より $\log a<\log c<\log b$　　よって $\log a+1<\log c+1<\log b+1$

また，$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ より $-2<\log a<\log b<0$　$-1<\log a+1<\log b+1<1$

ゆえに $-1<\log c+1<1$

したがって $-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$

# 第 11 講 関数の増減

## PART1 関数の増加と減少

**1** 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=\log x$ (2) $f(x)=xe^{-x}$ (3) $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

**[解答]**

(1) 関数 $f(x)$ の定義域は $x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}>0$$

したがって，$f(x)$ はつねに増加する。

(2) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると $x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ |

したがって，$f(x)$ は

$x\leqq 1$ で増加 $1\leqq x$ で減少

(3) 関数 $f(x)$ の定義域は $x\neq 2$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | ／ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ |

したがって，$f(x)$ は

$x\leqq 1,\ 3\leqq x$ で増加 $1\leqq x<2,\ 2<x\leqq 3$ で減少

# PART2 関数の極大・極小

## 2 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=\cos 2x-2\cos x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$　　(2) $f(x)=|x-1|\sqrt{x}$

**[解答]**

(1) $f'(x)=-2\sin 2x+2\sin x=-2\cdot 2\sin x\cos x+2\sin x=2\sin x(1-2\cos x)$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，$f'(x)=0$ となる $x$ の値は $\sin x=0$ より $x=0,\ \pi,\ 2\pi$

$1-2\cos x=0$ より $\cos x=\dfrac{1}{2}$　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\dfrac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-\dfrac{3}{2}$ | ↗ | 3 | ↘ | $-\dfrac{3}{2}$ | ↗ | $-1$ |

したがって，$f(x)$ は $x=\pi$ で極大値 3，$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。

(2) 関数 $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

$x \geqq 1$ のとき $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$ であるから

$x>1$ のとき $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

よって，$x>1$ においてつねに $f'(x)>0$

$0 \leqq x<1$ のとき $f(x)=-(x-1)\sqrt{x}$ であるから

$0<x<1$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$0<x<1$ の範囲で，$f'(x)=0$ となる $x$ の値は $x=\dfrac{1}{3}$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{1}{3}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | 0 | $-$ | ／ | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | 0 | ↗ |

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

# PART3 極値をもつための条件

**3** 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-7x+a}{x-2}$ が $x=3$ で極値をとるように，定数 $a$ の値を定めよ。

---

**[解答]**

$f(x)$ の定義域は $x \neq 2$

$$f'(x)=\frac{(2x-7)(x-2)-(x^2-7x+a)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+14-a}{(x-2)^2}$$

$f(x)$ は $x=3$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=3$ で極値をとるならば $f'(3)=0$

よって $11-a=0$ より $a=11$

このとき

$$f(x)=\frac{x^2-7x+11}{x-2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大<br>$-5$ | ↘ | ／ | ↘ | 極小<br>$-1$ | ↗ |

したがって，確かに $f(x)$ は $x=3$ で極小値 $-1$ をとる。

ゆえに，求める $a$ の値は $a=11$

# PART4 関数の最大・最小

**4** 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(x)=-x+e^x\ (-2\leqq x\leqq 1)$　　(2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

**[解答]**

(1) $f'(x)=-1+e^x$

$f'(x)=0$ とすると $e^x=1$ より $x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2+\dfrac{1}{e^2}$ | ↘ | $1$ | ↗ | $-1+e$ |

したがって，$f(x)$ は

$x=-2$ のとき　最大値 $2+\dfrac{1}{e^2}$，$x=0$ のとき　最小値 1　をとる。

(2) 関数 $f(x)$ の定義域は $1-x^2\geqq 0$ より $-1\leqq x\leqq 1$

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0$ とすると $1-2x^2=0$ より $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\dfrac{1}{2}$ | ↗ | $\dfrac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

したがって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

# 第12講　関数のグラフ

## PART1　曲線の凹凸と変曲点

**1**　次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1)　$y=x^4+x^3$　　(2)　$y=\log(x^2+1)$

**[解答]**

(1)　$y'=4x^3+3x^2$

$$y''=12x^2+6x=6x(2x+1)$$

$y''=0$ とすると $x=0,\ -\dfrac{1}{2}$

よって，曲線の凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | 下に凸 | $-\dfrac{1}{16}$ | 上に凸 | $0$ | 下に凸 |

したがって $x<-\dfrac{1}{2}$，$0<x$ で下に凸，$-\dfrac{1}{2}<x<0$ で上に凸

変曲点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{16}\right)$，$(0,\ 0)$

(2)　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$y''=0$ とすると $x=\pm 1$

よって，曲線の凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | 上に凸 | $\log 2$ | 下に凸 | $\log 2$ | 上に凸 |

したがって $x<-1$，$1<x$ で上に凸，$-1<x<1$ で下に凸

変曲点は点 $(-1,\ \log 2)$，$(1,\ \log 2)$

# PART2 関数のグラフの概形

**2** 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

**[解答]**

(1) $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

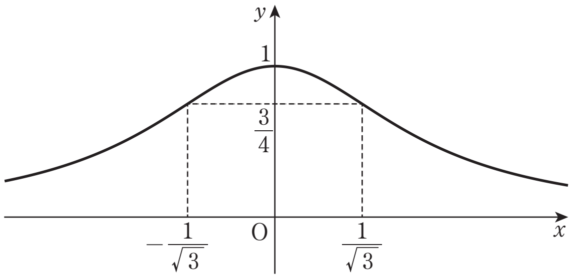
$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\dfrac{3}{4}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\dfrac{3}{4}$ | ↘ |

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ より $x$ 軸はこの曲線の漸近線である。

よって，グラフの概形は下図。




(2) 定義域は $x^2-3\neq 0$ より $x\neq\pm\sqrt{3}$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}=x+\frac{3x}{x^2-3}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-18x)(x^2-3)^2-(x^4-9x^2)\cdot 2(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-3)^4}=\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-\dfrac{9}{2}$ | ↘ | ／ | ↘ | $0$ | ↘ | ／ | ↘ | $\dfrac{9}{2}$ | ↗ |

$\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} f(x)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=-\infty$

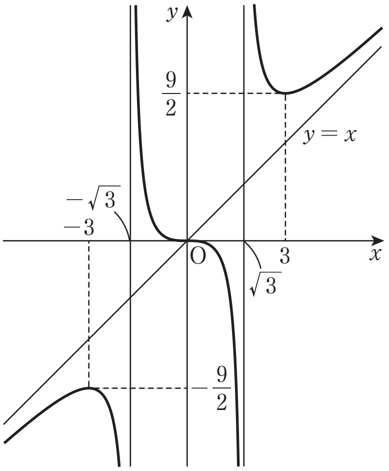
$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0$$

よって，直線 $x=-\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$，$y=x$ は

この曲線の漸近線である。

したがって，グラフの概形は右図。



# PART3 指数関数・対数関数のグラフの概形

**3** 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

**[解答]**

定義域は $x>0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $\log x=1$ より $x=e$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

$f''(x)=0$ とすると $\log x=\dfrac{3}{2}$ より $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

$f(x)$ の増減および凹凸は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↗(上に凸) | $\dfrac{1}{e}$ | ↘(上に凸) | $\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$ | ↘(下に凸) |

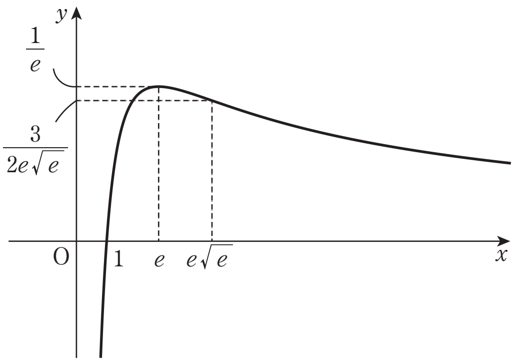
$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$ より，

$y$ 軸はこの曲線の漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ より，$x$ 軸もこの曲線の漸近線

$f(x)=0$ より $\dfrac{\log x}{x}=0$　　$x=1$

よって，グラフの概形は右図



# PART4 第 2 次導関数と極値

**4** 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x)=-x^4+2x^2+5$　　(2) $f(x)=x+2\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

**[解答]**

(1) $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f''(x)=-12x^2+4$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1,\ 0,\ 1$

$f''(-1)=-8<0$，$f''(0)=4>0$，$f''(1)=-8<0$

よって

極大値は $x=\pm1$ のとき 6　　極小値は $x=0$ のとき 5

(2) $f'(x)=1-2\sin x$

$f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$ より $\sin x=\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$，$f''\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\sqrt{3}>0$

よって

極大値は $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$　　極小値は $x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

# 第13講　方程式・不等式への応用

## PART1 不等式の証明

**1**　(1)　次の不等式を証明せよ。

(i)　$x>0$ のとき $\cos x>-x+1$　　(ii)　$x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2)　$x>0$ のとき不等式 $\log x<2\sqrt{x}$ を証明せよ。

---

**[解答]**

(1)(i)　$f(x)=\cos x-(-x+1)$ とおくと $f'(x)=-\sin x+1$

$x>0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi\times n$ ($n$ は 0 以上の整数)のときのみである。

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$f(0)=\cos 0-1=0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\cos x>-x+1$

(ii)　$g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと $g'(x)=\cos x-1+x=f(x)$

(i)より，$x>0$ のとき $f(x)>0$ であるから $g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$g(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき $g(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\sin x>x-\dfrac{x^2}{2}$

(2)　$f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと　$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

したがって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ／ | ↘ | 極小 2 | ↗ |

よって，$x>0$ における $f(x)$ の最小値は $f(1)=2>0$

したがって，$x>0$ のとき $f(x)>0$

ゆえに，$x>0$ のとき $\log x<2\sqrt{x}$

# PART2 方程式の実数解の個数

**2** (1) 方程式 $x=\cos x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) $a$ を定数とする。方程式 $e^x=ax$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ であることを用いてもよい。

---

**[解答]**

(1) $f(x)=x-\cos x$ とおくと $f'(x)=1+\sin x\geqq 0$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{3}{2}\pi+2\pi\times n$ ($n$ は整数)のときのみ

よって $f(x)$ は単調に増加する。

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-\cos x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-\cos x)=\infty$

したがって，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点の個数は 1 個であることから，

求める方程式の実数解の個数は 1 個である。

(2) $x=0$ はこの方程式の解ではないので

$$e^x=ax \iff \frac{e^x}{x}=a$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | $e$ | ↗ |

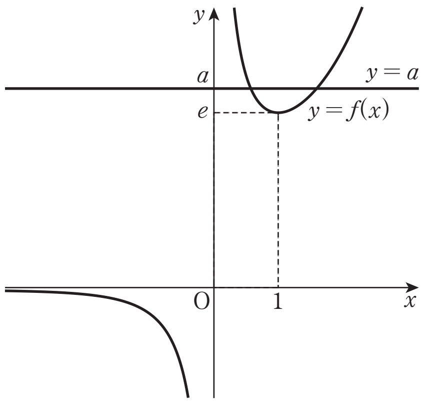
また $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。




$y=f(x)$ と直線 $y=a$ のグラフの共有点の個数が

求める方程式の実数解の個数であることから

$a>e$ のとき 2 個

$a=e$，$a<0$ のとき 1 個

$0 \leqq a<e$ のとき 0 個

# 第14講　速度と加速度，関数の近似式

## PART1　直線上の点の運動

**1**　(1)　$A$，$\omega$ を定数とする。数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が，時刻 $t$ の関数として $x=A\sin\omega t$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速度 $v$，加速度 $\alpha$ を求めよ。

(2)　地上から，初速度 $v_0$ でボールを真上に投げ上げたときの $t$ 秒後の高さ $y$ は $y=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$（$g$ は定数）と表される。$t$ 秒後におけるボールの速度 $v$ と加速度 $\alpha$ を求めよ。

**[解答]**

(1)　$v=\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t$，$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin\omega t$

(2)　$v=\dfrac{dy}{dt}=v_0-gt$，$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-g$

# PART2 平面上の点の運動

**2** 時刻 $t$ における点Pの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，点Pの時刻 $t$ における速度，速さ，加速度，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=e^t+e^{-t},\ y=e^t-e^{-t}$　　(2) $x=2\cos\frac{\pi}{3}t,\ y=2\sin\frac{\pi}{3}t$

**[解答]**

速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

(1) $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \dfrac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$ より

$$\vec{v}=(e^t-e^{-t},\ e^t+e^{-t})$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+(e^t+e^{-t})^2}=\sqrt{e^{2t}-2+e^{-2t}+e^{2t}+2+e^{-2t}}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t+e^{-t},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t-e^{-t}$ より

$$\vec{\alpha}=(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2+(e^t-e^{-t})^2}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{3}\pi\sin\dfrac{\pi}{3}t,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{3}\pi\cos\dfrac{\pi}{3}t$ より

$$\vec{v}=\left(-\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t,\ \frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\pi^2\left(\sin^2\frac{\pi}{3}t+\cos^2\frac{\pi}{3}t\right)}=\frac{2}{3}\pi$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{2}{9}\pi^2\cos\dfrac{\pi}{3}t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{2}{9}\pi^2\sin\dfrac{\pi}{3}t$ より

$$\vec{\alpha}=\left(-\frac{2}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t,\ -\frac{2}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{81}\pi^4\left(\cos^2\frac{\pi}{3}t+\sin^2\frac{\pi}{3}t\right)}=\frac{2}{9}\pi^2$$

# PART3 関数の近似式

**3** (1) $h \fallingdotseq 0$ のとき，$\cos(a+h)$ の 1 次の近似式をつくり，$\cos 46^\circ$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。ただし，$\pi=3.142$，$\sqrt{2}=1.414$ とする。

(2) 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

(i) $\dfrac{1}{0.998^2}$　　(ii) $\sqrt[3]{346}$

---

**[解答]**

(1) $(\cos x)'=-\sin x$ より

$h \fallingdotseq 0$ のとき　$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a+(-\sin a)h=\cos a-h\sin a$

$46^\circ=45^\circ+1^\circ=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}$ より

$$\cos 46^\circ=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq \cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0.6946\cdots\cdots \fallingdotseq 0.695$$

(2)(i) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}$

$f(0)=1$，$f'(0)=-2$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{1}{(1+x)^2} \fallingdotseq 1-2x$

したがって $\dfrac{1}{0.998^2}=\dfrac{1}{(1-0.002)^2} \fallingdotseq 1-2\cdot(-0.002)=1.004$

(ii) $\sqrt[3]{346}=\sqrt[3]{343+3}=\sqrt[3]{7^3\left(1+\dfrac{3}{7^3}\right)}=7\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{7^3}}$

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{3}$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sqrt[3]{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}x$

したがって

$$\sqrt[3]{346}=7\sqrt[3]{1+\frac{3}{7^3}} \fallingdotseq 7\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7^3}\right)=7+\frac{1}{7^2}=\frac{344}{49}=7.0204\cdots\cdots \fallingdotseq 7.020$$

# 第15講　不定積分

## PART1　不定積分の計算

**1**　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

(3) $\displaystyle\int\frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2}{x}dx$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}dx=-\frac{1}{3}x^{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{5x^2+4x}{\sqrt{x}}dx=\int(5x\sqrt{x}+4\sqrt{x})dx=\int\left(5x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=2x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=2x^2\sqrt{x}+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-2}{x}dx=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{x}\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}-2\log|x|+C=2\sqrt{x}-2\log|x|+C$

# PART2 三角関数・指数関数の不定積分

**2** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(1-\tan x)\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx$　　(4) $\displaystyle\int(5e^x-2^x\log 2)dx$

**[解答]**

(1) $$\int(1-\tan x)\cos x\,dx=\int\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x\,dx$$
$$=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$$

(2) $$\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$$

(3) $$\int\frac{1}{\tan^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$
$$=-\frac{1}{\tan x}-x+C$$

(4) $$\int(5e^x-2^x\log 2)dx=5e^x-\frac{2^x\log 2}{\log 2}+C=5e^x-2^x+C$$

# PART3 $f(ax+b)$ の不定積分

**3** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta$

(4) $\displaystyle\int\left(e^{-2x}+3^{4x-3}\right)dx$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\,dx=\int(3x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{2}{2x-1}dx=2\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1|+C=\log|2x-1|+C$

(3) $\displaystyle\int\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)d\theta=\frac{1}{2}\cdot\left\{-\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+C=-\frac{1}{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+C$

(4) $\displaystyle\int\left(e^{-2x}+3^{4x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3^{4x-3}}{\log 3}+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{3^{4x-3}}{4\log 3}+C$

# PART4　次数下げと部分分数分解

**4**　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x-\log|x-2|+C$

(2) $\displaystyle\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}=2x+\frac{1}{x^2-x}=2x+\frac{1}{x(x-1)}=2x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ より

$$\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=x^2+\log|x-1|-\log|x|+C$$

$$=x^2+\log\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

(3) $\displaystyle\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ とおき，分母をはらうと

$x+3=a(x+2)+b(x+1)$

$x+3=(a+b)x+2a+b$

$a+b=1$，$2a+b=3$ より $a=2$，$b=-1$

よって

$$\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\log|x+1|-\log|x+2|+C$$

$$=\log(x+1)^2-\log|x+2|+C=\log\frac{(x+1)^2}{|x+2|}+C$$

# PART5 三角関数の次数を下げる

**5** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x dx$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 4x dx$　(4) $\displaystyle\int \cos 3x \cos x dx$　(5) $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x dx$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int \{\sin 6x+\sin(-2x)\}dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x-\sin 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C = -\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

(4) $\displaystyle\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(5) $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x dx = \int \sin 5x \sin 3x dx = -\frac{1}{2}\int (\cos 8x-\cos 2x)dx$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = -\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

# 第16講 置換積分法，部分積分法

## PART1 置換積分法

**1** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^2}dx$

---

**[解答]**

(1) $\sqrt{x-3}=t$ とおくと　$x=t^2+3$ より $dx=2tdt$

$$\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx=\int (t^2+1)t\cdot 2tdt=2\int (t^4+t^2)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2+5)+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-4)(x-3)\sqrt{x-3}+C$$

(2) $x-4=t$ とおくと $x=t+4$ より $dx=dt$

$$\int \frac{x}{(x-4)^2}dx=\int \frac{t+4}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt$$

$$=\log|t|-\frac{4}{t}+C$$

$$=\log|x-4|-\frac{4}{x-4}+C$$

# PART2 $f(g(x))g'(x)$ の形の不定積分

**2** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int \tan x dx$

---

**[解答]**

(1) $x^3+1=u$ とおくと $3x^2dx=du$

$$\int x^2(x^3+1)^4dx=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^4\cdot 3x^2dx=\frac{1}{3}\int u^4du=\frac{1}{15}u^5+C=\frac{1}{15}(x^3+1)^5+C$$

(2) $\log x=u$ おくと $\dfrac{1}{x}dx=du$

$$\int\frac{\log x}{x}dx=\int\log x\cdot\frac{1}{x}dx=\int udu=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{(\log x)^2}{2}+C$$

(3) $\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\log|e^x+e^{-x}|+C=\log(e^x+e^{-x})+C$

(4) $\displaystyle\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+C$

# PART3 置換積分法と三角関数

**3** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x dx = \int \cos^5 x\cdot(-\cos x)' dx = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x\cdot\cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx$

$\sin x = u$ とおくと　$\cos x dx = du$

$$\int \cos^3 x dx = \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x = u$ とおくと　$\cos x dx = du$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}(\log|1+u| - \log|1-u|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$$

# PART4 部分積分法

**4** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)\cos 2x dx$　(2) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$　(3) $\displaystyle\int \log(x-2) dx$

**[解答]**

(1) $$\int (x+1)\cos 2x dx = \int (x+1)\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx$$

$$=(x+1)\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int 1\cdot\frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{2}(x+1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

(2) $$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 (-e^{-x})' dx$$

$$= x^2\cdot(-e^{-x}) - \int 2x\cdot(-e^{-x}) dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x\cdot(-e^{-x})' dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left\{x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x}) dx\right\}$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$$

(3) $$\int \log(x-2) dx = \int 1\cdot\log(x-2) dx = \int (x-2)'\cdot\log(x-2) dx$$

$$= (x-2)\cdot\log(x-2) - \int (x-2)\cdot\frac{1}{x-2} dx$$

$$= (x-2)\log(x-2) - \int dx = (x-2)\log(x-2) - x + C$$

# 第17講　定積分

## PART1　定積分の計算

**1**　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}\,dt-\int_1^0 e^{2t-1}\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\sin 3x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi} |\cos x|\,dx$

---

**[解答]**

(1) $\displaystyle\int_0^3 (2x-1)^3\,dx=\left[\frac{1}{8}(2x-1)^4\right]_0^3=\frac{1}{8}(625-1)=78$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}[\log x-\log(x+2)]_1^2$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{x}{x+2}\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_1^3 e^{2t-1}\,dt-\int_1^0 e^{2t-1}\,dt=\int_1^3 e^{2t-1}\,dt+\int_0^1 e^{2t-1}\,dt=\int_0^3 e^{2t-1}\,dt$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t-1}\right]_0^3=\frac{1}{2}\left(e^5-\frac{1}{e}\right)$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\sin 3x\,dx=\int_0^{\pi}\sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 4x+\sin 2x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=0$$

(6) $\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $|\cos x|=\cos x$　　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ のとき $|\cos x|=-\cos x$

よって $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4}{3}\pi}|\cos x|\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}(-\cos x)\,dx$

$$=[\sin x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=2$$

# PART2 定積分の置換積分法

**2** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

---

**[解答]**

(1) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと　$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

| $x$ | $2 \to 5$ |
|---|---|
| $t$ | $1 \to 2$ |

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{t^2+1}{t}\cdot 2tdt$$

$$=2\int_1^2 (t^2+1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^2=\frac{20}{3}$$

(2) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin xdx=dt$

| $x$ | $0 \to \frac{\pi}{3}$ |
|---|---|
| $t$ | $1 \to \frac{1}{2}$ |

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^3 xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=-\int_1^{\frac{1}{2}} t^3\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^3\,dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{15}{64}$$

(3) $e^x+2=t$ とおくと　$e^x\,dx=dt$

| $x$ | $0 \to 1$ |
|---|---|
| $t$ | $3 \to e+2$ |

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx=\int_3^{e+2} \frac{1}{t}dt$$

$$=[\log t]_3^{e+2}=\log(e+2)-\log 3=\log\frac{e+2}{3}$$

# PART3 特殊な形の置換積分法

**3** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

---

**[解答]**

(1) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta d\theta$

| $x$ | $1 \to \sqrt{2}$ |
|---|---|
| $\theta$ | $\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4}$ |

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos\theta\cdot2\cos\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta$

$$=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta d\theta$

| $x$ | $-\sqrt{2} \to 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{6}$ |

$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ において，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi$

(3) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

| $x$ | $0 \to \sqrt{3}$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0 \to \frac{\pi}{4}$ |

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

# PART4 偶関数・奇関数の定積分

**4** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

**[解答]**

(1) $f(x)=x(x^2-2)^2$ とおくと，$f(-x)=-x(x^2-2)^2=-f(x)$ より

$f(x)$ は奇関数であるから

$$\int_{-1}^{1} x(x^2-2)^2\,dx=0$$

(2) $f(x)=e^x-e^{-x}$ とおくと，$f(-x)=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$ より

$f(x)$ は奇関数であるから

$$\int_{-2}^{2} (e^x-e^{-x})\,dx=0$$

(3) $\sin x$ は奇関数より，$\sin^2 x$ は偶関数

よって，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

# PART5 定積分の部分積分法

**5** 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

**[解答]**

(1) $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\left\{\frac{(x-\beta)^2}{2}\right\}'dx$$

$$=\left[(x-\alpha)\cdot\frac{(x-\beta)^2}{2}\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(x-\beta)^2 dx$$

$$=-\frac{1}{6}\left[(x-\beta)^3\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $$\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}dx=\int_1^3 \log x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$=\left[\log x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^3-\int_1^3 \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=-\frac{\log 3}{3}+\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx=-\frac{\log 3}{3}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3=-\frac{\log 3}{3}+\frac{2}{3}$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(-\cos x)'dx$$

$$=\left[x^2(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(-\cos x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx$$

$$=2\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin x dx=\pi-2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

# 第18講　定積分関数

## PART1　定積分で表された関数

**1**　次の関数を $x$ で微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^x (t-2)e^t\,dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2x} \cos^2 t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt$

**[解答]**

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x (t-2)e^t\,dt=(x-2)e^x$

(2) $\cos^2 t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると，$F'(t)=\cos^2 t$

$$\int_0^{2x}\cos^2 t\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^{2x}=F(2x)-F(0)$$

よって　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{2x}\cos^2 t\,dt=F'(2x)\cdot(2x)'-F'(0)=2\cos^2 2x$

(3) $\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt=x\int_0^x \sin 3t\,dt-\int_0^x t\sin 3t\,dt$ より

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin 3t\,dt=1\cdot\int_0^x \sin 3t\,dt+x\sin 3x-x\sin 3x$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^x=-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}$$

# PART2 関数方程式

**2** 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2e^x-\int_0^1 f(t)dt$　　(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$

**[解答]**

(1) $\int_0^1 f(t)dt=k$ とおくと，$f(x)=2e^x-k$

よって $k=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (2e^t-k)dt=\left[2e^t-kt\right]_0^1=2e-k-2$ より

$k=2e-k-2$　　よって $k=e-1$

したがって $f(x)=2e^x-e+1$

(2) $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\int_1^x (x-t)\log t\,dt$ ……① より

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2+x\int_1^x \log t\,dt-\int_1^x t\log t\,dt$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x+\int_1^x \log t\,dt+x\log x-x\log x=\frac{3}{2}x+\int_1^x 1\cdot\log t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}x+\int_1^x (t)'\log t\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x+\left[t\log t\right]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{3}{2}x+x\log x-\int_1^x dt$$

$$=\frac{3}{2}x+x\log x-\left[t\right]_1^x=x\log x+\frac{1}{2}x+1$$

よって $f(x)=\int x\log x\,dx+\frac{1}{4}x^2+x=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log x\,dx+\frac{1}{4}x^2+x$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx+\frac{1}{4}x^2+x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+C=\frac{1}{2}x^2\log x+x+C \quad \cdots\cdots ②$$

①で $x=1$ のとき $f(1)=\frac{3}{4}$　　よって②より $1+C=\frac{3}{4}$　　$C=-\frac{1}{4}$

したがって $f(x)=\frac{1}{2}x^2\log x+x-\frac{1}{4}$

# 第19講　区分求積法，定積分と不等式

# PART1　区分求積法と定積分

**1**　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

---

**[解答]**

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\pi\cdot\frac{k}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{nk}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

# PART2 定積分と不等式

**2** $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ であることを証明し，これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$ が成り立つことを証明せよ。

---

**[解答]**

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$0 \leqq x^3 \leqq x \qquad -x \leqq -x^3 \leqq 0 \qquad 1-x \leqq 1-x^3 \leqq 1$$

$1-x>0$ より $\sqrt{1-x} \leqq \sqrt{1-x^3} \leqq 1$

よって　$1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ……①

①の等号は常には成り立たないから

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} dx = [x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{2}$

よって $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 2-\sqrt{2}$

# 第20講　面積

## PART1　曲線と $x$ 軸の間の面積

**1**　(1)　次の曲線や直線および $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(i)　$y=\sin x$　$\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$

(ii)　$y=-\sqrt{x+1}$，$x=-1$，$x=1$

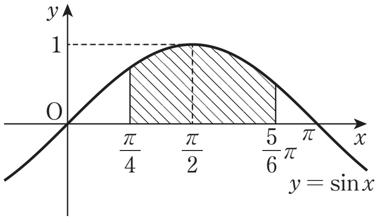
(2)　曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S$ を求めよ。

**[解答]**

(1)(i)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ において $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

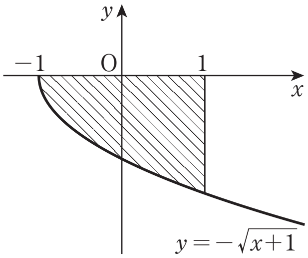
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$




(ii)　$-1\leqq x\leqq 1$ において $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-1}^{1}(-\sqrt{x+1})dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$




(2)　曲線 $y=e^x-\sqrt{e}$ と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は

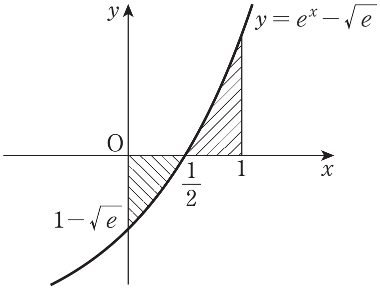
$e^x-\sqrt{e}=0$　　$e^x=e^{\frac{1}{2}}$　　よって $x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ においては $y\leqq 0$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ においては $y\geqq 0$

であるから

$$S=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}(e^x-\sqrt{e})dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^x-\sqrt{e})dx$$



$$=-\left[e^x-\sqrt{e}\,x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[e^x-\sqrt{e}\,x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=-\left\{\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)-(1-0)\right\}+\left\{(e-\sqrt{e})-\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)\right\}=1+e-2\sqrt{e}$$

# PART2　2 曲線の間の面積

**2**　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$，$4x+2y=9$

(2)　$y=\sqrt{3}\sin x$，$y=\cos x$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

**[解答]**

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$ より $xy=1$ …… ①　　$4x+2y=9$ より $y=-2x+\dfrac{9}{2}$ …… ②

①，②より $x\left(-2x+\dfrac{9}{2}\right)=1$　　$4x^2-9x+2=0$　　$(4x-1)(x-2)=0$

よって，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と直線 $4x+2y=9$ の

共有点の $x$ 座標は $x=\dfrac{1}{4}$，2

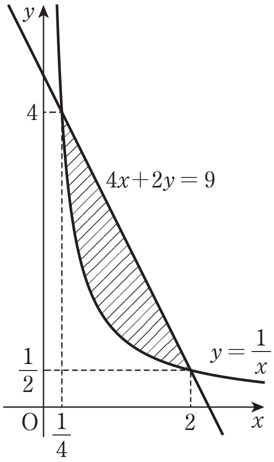
$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 2$ においては $-2x+\dfrac{9}{2}\geqq\dfrac{1}{x}$

よって $S=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{2}\left\{\left(-2x+\frac{9}{2}\right)-\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\left[-x^2+\dfrac{9}{2}x-\log|x|\right]_{\frac{1}{4}}^{2}$

$=(-4+9-\log 2)-\left(-\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{8}-\log\dfrac{1}{4}\right)$

$=\dfrac{63}{16}-3\log 2$



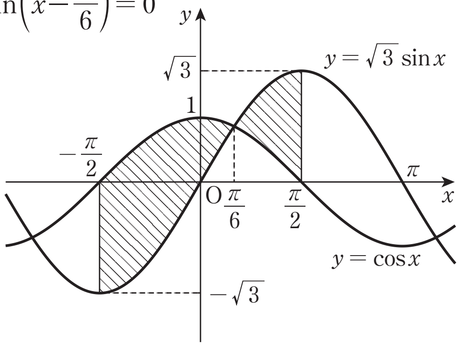

(2)　$\sqrt{3}\sin x=\cos x$ より $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$　　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{2}{3}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって $x-\dfrac{\pi}{6}=0$　より $x=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，$y=\sqrt{3}\sin x$，$y=\cos x$ の

グラフは右図。



$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$ においては $\cos x \geqq \sqrt{3}\sin x$

$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ においては $\sqrt{3}\sin x \geqq \cos x$

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x+\sqrt{3}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\sqrt{3}\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-(-1+0)+(0-1)-\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=4$$

# PART3 曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸の間の面積

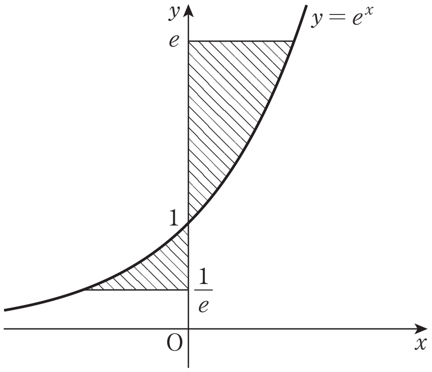
**3** 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

(1) $y=e^x$，$y=e$，$y=\dfrac{1}{e}$，$y$ 軸

(2) $y=\sqrt{x-1}$，$y=x-1$

**[解答]**

(1) 曲線 $y=e^x$ と $y$ 軸の共有点の $y$ 座標は $y=1$




$y=e^x$ より $x=\log y$

$\dfrac{1}{e}\leqq y\leqq 1$ においては $\log y\leqq 0$

$1\leqq y\leqq e$ においては $\log y\geqq 0$

$$S=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\log y\,dy+\int_{1}^{e}\log y\,dy$$

ここで $\displaystyle\int\log x\,dx=\int 1\cdot\log x\,dx$

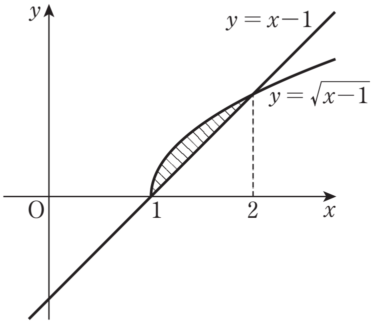
$$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\log x-x+C \text{ より}$$

$$S=-[y\log y-y]_{\frac{1}{e}}^{1}+[y\log y-y]_{1}^{e}=-\left\{(0-1)-\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)\right\}+\{(e-e)-(0-1)\}=2-\frac{2}{e}$$

(2) $\sqrt{x-1}=x-1$ より　$x-1=(x-1)^2$　$(x-1)(x-2)=0$

$x=1,\ 2$ (ともに $x\geqq 1$ を満たす)

よって，曲線 $y=\sqrt{x-1}$ と $y=x-1$ のグラフは右図




$$S=\int_{1}^{2}\{\sqrt{x-1}-(x-1)\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

(別解)

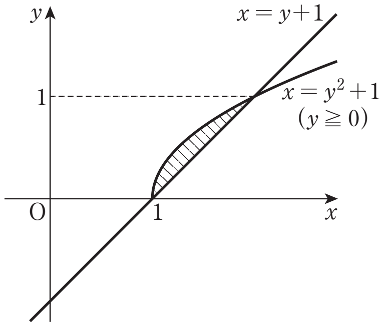
$y=\sqrt{x-1}\iff x-1=y^2\ (y\geqq 0)\iff x=y^2+1\ (y\geqq 0)$

$y=x-1\iff x=y+1$

$y^2+1=y+1$ より $y^2-y=0$ $y(y-1)=0$

$y=0$，1 （ともに $y\geqq 0$ を満たす）

よって，曲線 $x=y^2+1$ $(y\geqq 0)$，$x=y+1$ のグラフは右図




$$S=\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy$$

$$=\int_0^1(-y^2+y)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

# PART4 いろいろな曲線と面積

**4** (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ。

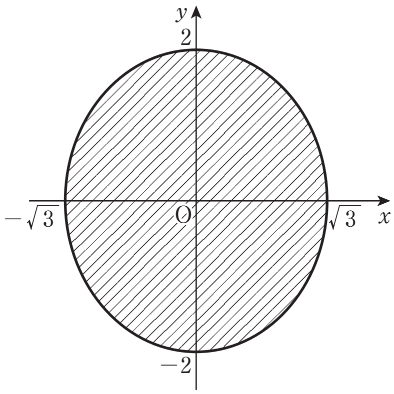
(2) 媒介変数 $\theta$ によって，$x=2\cos\theta$，$y=\sin 2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。

**[解答]**

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を $y$ について解くと

$$y^2=4\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=\frac{4}{3}(3-x^2)$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$$



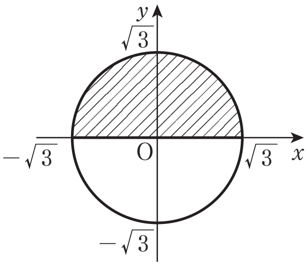

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$ は楕円の上半分を，

$y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}$ は楕円の下半分を表している。

よって，求める面積 $S$ は

$$S=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

ここで，$y=\sqrt{3-x^2}\iff x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$，$y\geqq 0$ であるから，$y=\sqrt{3-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 $\sqrt{3}$ の円の上半分である。よって，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の半円の面積を表す。




したがって　$S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}\pi\cdot(\sqrt{3})^2=2\sqrt{3}\,\pi$

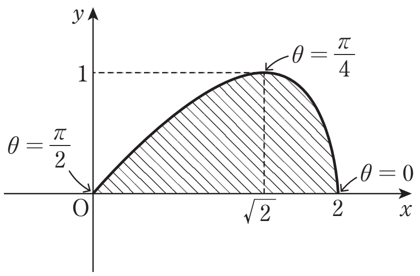
(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$0\leqq 2\theta\leqq\pi$　　よって $y\geqq 0$

$y=0$ より　　$2\theta=0,\ \pi$　　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$

したがって，曲線と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は $x=0,\ 2$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$ より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $\dfrac{dx}{d\theta}\leqq 0$（等号成立は $\theta=0$ のとき）

よって，求める面積は右図斜線部分の面積で




$$S=\int_0^2 y\,dx$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$ より $dx=-2\sin\theta d\theta$

$x$ と $\theta$ の対応は右の通り。

| $x$ | $2\to 0$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\to\dfrac{\pi}{2}$ |

よって，置換積分法より

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2\theta(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta$$

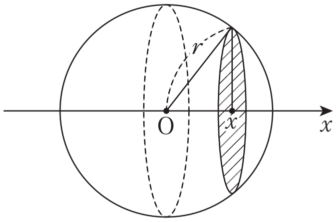
$$=4\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$$

# 第21講　体積

## PART1　定積分と体積

**1**　半径 $r$ の球の中心Oを原点として，$x$ 軸をとる。

(1)　$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面でこの球を切ったときの断面は円である。この円の半径を $r$ と $x$ を用いて表せ。



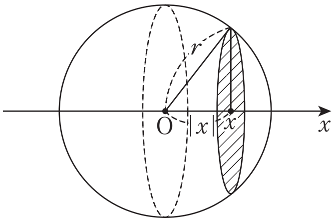

(2)　(1)の結果を用いて，この球の体積 $V$ が $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ で表されることを示せ。

---

**[解答]**

(1)　三平方の定理より，求める断面の円の半径は

$$\sqrt{r^2-x^2}$$




(2)　断面の円の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\pi\left(r^2-x^2\right)$$

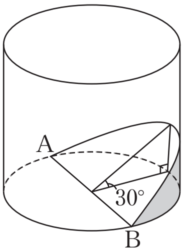
よって

$$V=\int_{-r}^{r}S(x)dx=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=2\pi\int_{0}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx$$

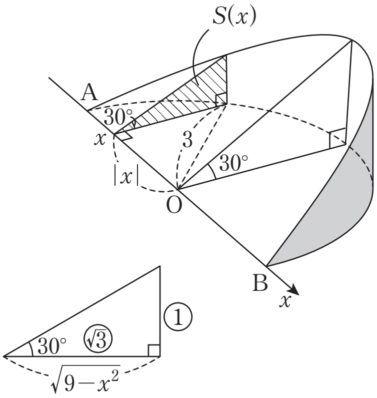
$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

# PART2 断面図と立体の体積

**2** 底面の半径が 3，高さが 3 の直円柱がある。この直円柱の底面の直径 AB を含み，底面と 30° の角をなす平面で，この直円柱を 2 つに分けるとき，小さい方の立体の体積 $V$ を求めよ。




**[解答]**




小さい方の立体の体積を考える。底面の中心 O を原点とし，直線 AB を $x$ 軸とする。

$x$ 軸に垂直で，$x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)$$

よって，求める体積 $V$ は

$$V=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(9-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=6\sqrt{3}$$

# PART3 $x$ 軸の周りの回転体の体積

**3** 次の曲線や直線で囲まれた図形を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ を求めよ。

(1) $y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$x$ 軸　　(2) $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

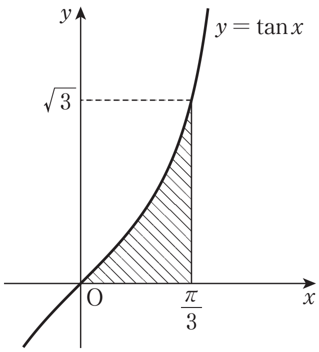
**[解答]**

(1) $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\pi[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$




(2) $x^2=\sqrt{x}$ より $x^4=x$　　$x(x^3-1)=0$　　$x=0，1$

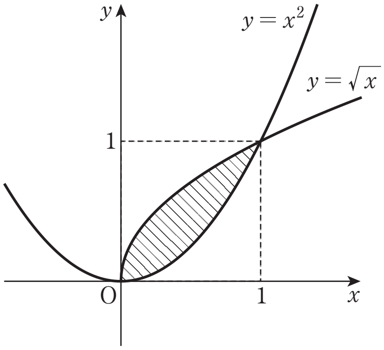
$0\leqq x\leqq 1$ においては $0\leqq x^2\leqq\sqrt{x}$

$V=\pi\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\{(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\}dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1(x-x^4)dx$

$=\pi\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}x^5\right]_0^1=\dfrac{3}{10}\pi$



# PART4　$y$ 軸の周りの回転体の体積

**4**　次の曲線や直線で囲まれた図形を $y$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V$ を求めよ。

(1)　$y=x^2+1$，$y=3$　　(2)　$y=-x^2+4x$，$x$ 軸

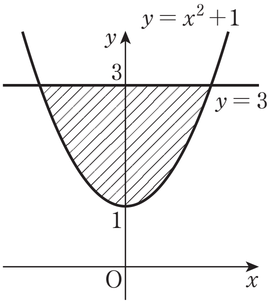
**[解答]**

(1)　$y=x^2+1$ より $x^2=y-1$

$$V=\pi\int_1^3(y-1)dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2-y\right]_1^3$$

$$=2\pi$$

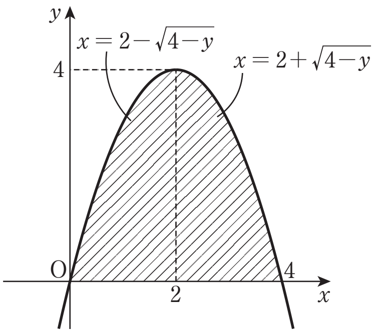



(2)　$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

$(x-2)^2=4-y$

$x=2\pm\sqrt{4-y}$

$0\leqq y\leqq 4$ において $2+\sqrt{4-y}\geqq 2-\sqrt{4-y}\geqq 0$




$$V=\pi\int_0^4(2+\sqrt{4-y})^2dy-\pi\int_0^4(2-\sqrt{4-y})^2dy$$

$$=\pi\int_0^4\{(2+\sqrt{4-y})^2-(2-\sqrt{4-y})^2\}dy$$

$$=\pi\int_0^4\{(4+4\sqrt{4-y}+4-y)-(4-4\sqrt{4-y}+4-y)\}dy$$

$$=8\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy$$

$$=8\pi\left[-\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{128}{3}\pi$$

# 第22講　曲線の長さ，速度と道のり

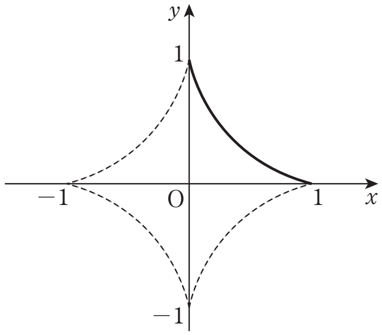
## PART1 曲線の長さ

**1** (1) アステロイド $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の長さを求めよ。

(2) カテナリー $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の長さを求めよ。

**[解答]**

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$ より



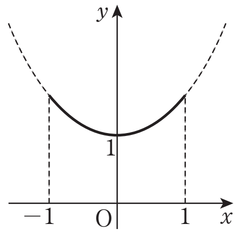

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2$$
$$=9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)$$
$$=(3\sin t\cos t)^2=\left(\frac{3}{2}\sin 2t\right)^2$$

$0 \leqq 2t \leqq \pi$ より $\sin 2t \geqq 0$

よって，求める曲線の長さ $L$ は

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sin 2t\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より




$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$$

よって，求める曲線の長さ $L$ は

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=2\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=e-\frac{1}{e}$$

# PART2 速度と道のり

**2** (1) 数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度が $v=\cos t$ であるとき，$t=0$ から $t=2\pi$ までの点Pの位置の変化量 $s$, および点Pの通過する道のり $l$ を求めよ。

(2) 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が $x=\dfrac{1}{2}t^2$, $y=\dfrac{1}{3}t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの点Pの動く道のり $l$ を求めよ。

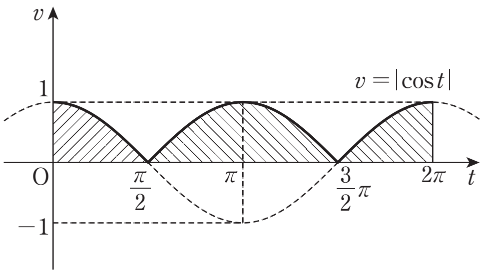
**[解答]**

(1) 点Pの位置の変化量は

$$s=\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=[\sin t]_0^{2\pi}=0$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき $\cos t\geqq 0$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $\cos t\leqq 0$




よって，点Pの通過する道のりは

$$l=\int_0^{2\pi}|\cos t|dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos t)dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$=[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}+[\sin t]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=1-(-2)+1=4$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=t$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2$ より

$$l=\int_0^2\sqrt{t^2+(t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^2(t^2+1)}\,dt=\int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$t^2+1=u$ とおくと　$2tdt=du$

| $t$ | $0\ \rightarrow\ 2$ |
|---|---|
| $u$ | $1\ \rightarrow\ 5$ |

よって

$$l=\int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt=\int_0^2\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}\cdot 2tdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^5\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$$

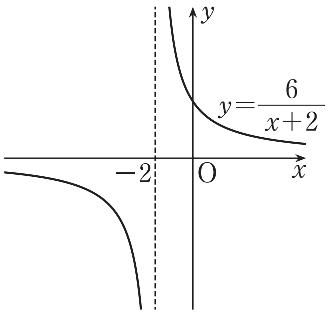
# 第 1 講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：②

**[解説]**

$y=\dfrac{6}{x+2}$ のグラフは，$y=\dfrac{6}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-2$，$y=0$ [A]



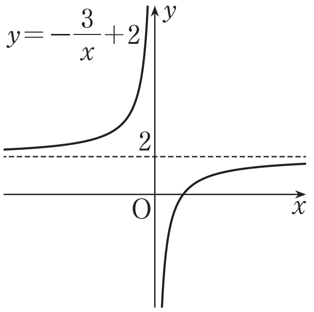

[A]　$y=\dfrac{k}{x-p}$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$ だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=0$

**2**　**[正解]** イ：②

**[解説]**

$y=-\dfrac{3}{x}+2$ のグラフは，$y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=0$，$y=2$ [B]




[B]　$y=\dfrac{k}{x}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=0$，$y=q$

## 3 [正解] ウ：④

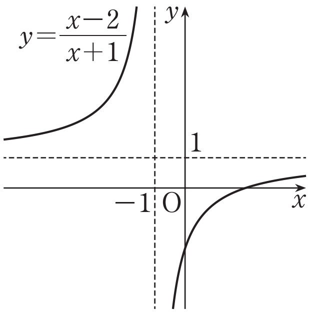
**[解説]**

$$y=\frac{x-2}{x+1}=\frac{(x+1)-3}{x+1}$$

$$=-\frac{3}{x+1}+1 \quad \text{[C]}$$

このグラフは，$y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 1 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=-1$，$y=1$ [D]




[C]　分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の式を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形する。

[D]　$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=q$

## 4 [正解] エ：①

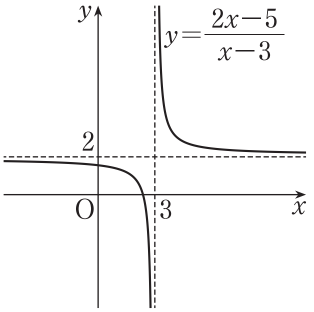
**[解説]**

$$y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}$$

$$=\frac{1}{x-3}+2 \quad \text{[E]}$$

このグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に 3，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した直角双曲線である。

漸近線は，2 直線 $x=3$，$y=2$ [F]




[E]　分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の式を $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形する。

[F]　$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した直角双曲線である。
漸近線は，2 直線 $x=p$，$y=q$

**5**

**[正解]** オ：1，カキ：$-2$

**[解説]**

$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフと直線 $y=x+3$ の共有点

の $x$ 座標は，方程式

$$\frac{3x+5}{x+1}=x+3 \quad \text{[G]}$$

の解である。これを解くと，

$$3x+5=(x+3)(x+1)$$

$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2,\ 1$$

これらは $x \neq -1$ を満たす。

よって，共有点の $x$ 座標は，**1，$-2$**

[G]　2つの式から $y$ を消去して，$x$ の方程式をつくる。

**6**　**[正解]** **クケ**：$-2$，**コ**：$1$

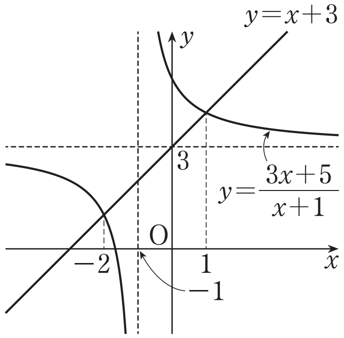
**[解説]**

不等式 $\dfrac{3x+5}{x+1}>x+3$ の解は，$y=\dfrac{3x+5}{x+1}$ のグラフが直線 $y=x+3$ より上側にある $x$ の値の範囲である。[H]

[H]　2つのグラフの上下関係を利用して解く。

$$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$$

のグラフおよび $y=x+3$ のグラフは，次の図のようになる。




よって，グラフより，

$$\frac{3x+5}{x+1}>x+3$$

$\boldsymbol{x<-2,\ -1<x<1}$ [I]

[I]　$x\neq-1$ であることに注意する。

# 第 1 講 PART2 確認問題 解答

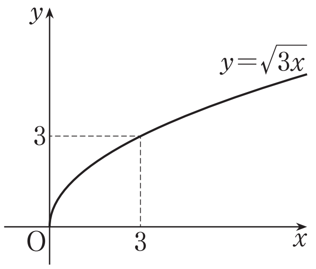
**1** **[正解]**ア：①，イ：⑤，ウ：③，エ：⑥

**[解説]**

$y=\sqrt{3x}$ の定義域は，$x \geqq 0$

値域は，　$y \geqq 0$

[A]

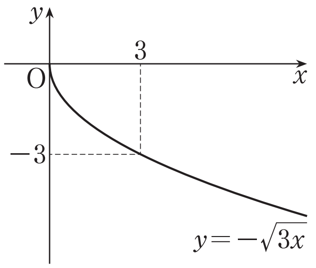



[A]　$y=\sqrt{3x}$ のグラフは，放物線 $y^2=3x$ の $y \geqq 0$ の部分。

$y=-\sqrt{3x}$ の定義域は，$x \geqq 0$

値域は，　$y \leqq 0$

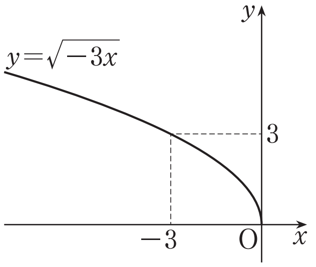
[B]




[B]　$y=-\sqrt{3x}$ のグラフは，放物線 $y^2=3x$ の $y \leqq 0$ の部分。

$y=\sqrt{-3x}$ の定義域は，$x \leqq 0$ [C]

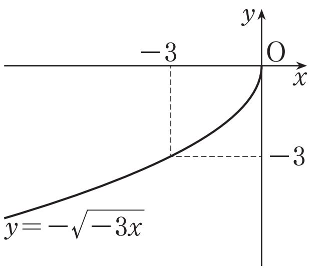
値域は，　$y \geqq 0$




[C]　$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上であるから，
$-3x \geqq 0$
よって，$x \leqq 0$ である。

$y=-\sqrt{-3x}$ の定義域は，$x \leqq 0$

値域は，　$y \leqq 0$




[D]

[D]　$y=-\sqrt{-3x}$ のグラフは，$y=\sqrt{-3x}$ のグラフと $x$ 軸に関して対称である。

**2**

**[正解]** オ：5，カ：3

**[解説]**

$y=\sqrt{x+4}$ のグラフと直線 $y=x-2$ の共有点の $x$ 座標は，

$$\sqrt{x+4}=x-2 \quad \cdots\cdots ①$$ [E]

の解である。

[E]　2 つの式から $y$ を消去して，$x$ の方程式をつくって解く。

両辺を 2 乗すると，

$$x+4=(x-2)^2$$

$$x+4=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x=0$$

$$x(x-5)=0$$

$$x=0,\ 5$$

$x=0$ のとき，①において，[F]

(左辺)$=2$，(右辺)$=-2$ より不適。

[F]　求めた $x$ の値が①を満たすかどうかを確認する。

$x=5$ のとき，①の両辺の値は 3

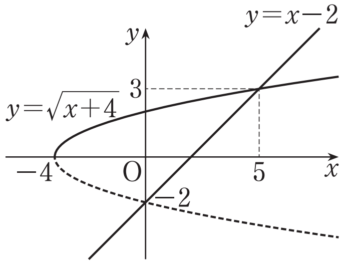
よって，共有点の座標は，(5，3)

**3** **[正解]** キク：$-4$，ケ：$5$

**[解説]**

不等式 $\sqrt{x+4}>x-2$ の解は，$y=\sqrt{x+4}$ のグラフが直線 $y=x-2$ より上側にある $x$ の値の範囲である。[G]

$y=\sqrt{x+4}$ のグラフおよび $y=x-2$ のグラフは，次の図のようになる。




よって，グラフより，[H]

$$\sqrt{x+4}>x-2$$

$$\boldsymbol{-4 \leqq x < 5}$$

[G]　2つのグラフの上下関係を利用して解く。

[H]　$y=\sqrt{x+4}$ の定義域が $x \geqq -4$ であることに注意する。

# 第 1 講　PART3 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：④，イ：2，ウ：8

**[解説]**

$$y=-2x+8 \quad (0\leqq x\leqq 3)$$

この関数の値域は，$2\leqq y\leqq 8$

$y=-2x+8$ を $x$ について解くと，[A]

$$2x=-y+8$$

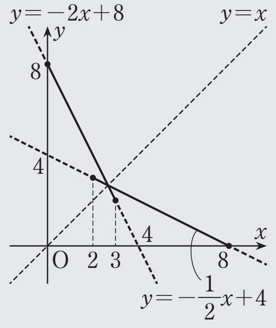
$$x=-\frac{1}{2}y+4$$

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+4 \quad (2\leqq x\leqq 8)}$$ [B]

[A]　$y=f(x)$ の逆関数の求め方
① $y=f(x)$ を $x$ について解き，$x=g(y)$ の形にする。
② $x=g(y)$ の $x$ と $y$ を入れ替えて $y=g(x)$ とする。
この $g(x)$ が，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ である。

[B]　・$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れ替わる。
・$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。




**2**　**[正解]** エ：②，オ：0

**[解説]**

$y=\sqrt{x-3}$ の値域は，$y\geqq 0$

$y=\sqrt{x-3}$ を $x$ について解く。

$\sqrt{x-3}=y$ の両辺を 2 乗すると，[C]

$$x-3=y^2$$

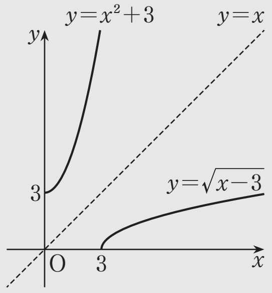
$$x=y^2+3$$

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=x^2+3 \quad (x\geqq 0)}$$ [D]

[C]　両辺を 2 乗して $\sqrt{\ }$ をはずす。

[D]



**3**

**[正解]** カ：③

**[解説]**

$y=3^x$ の値域は，$y>0$ [E]

$y=3^x$ を $x$ について解くと，

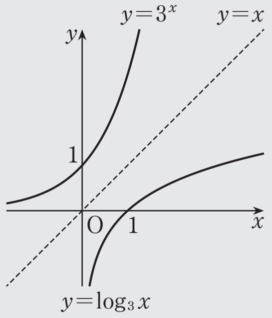
$x=\log_3 y$ [F]

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=\log_3 x}$$

[E]　逆関数の定義域は $x>0$ である。

[F]　$y=a^x \iff x=\log_a y$




**4**

**[正解]** キ：①

**[解説]**

$y=\log_2 x$ の値域は，実数全体である。[G]

$y=\log_2 x$ を $x$ について解くと，

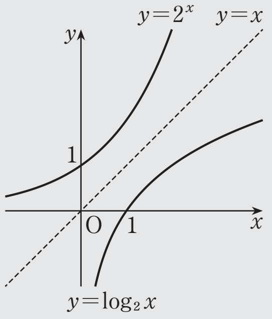
$x=2^y$ [H]

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=2^x}$$

[G]　逆関数の定義域も実数全体となる。

[H]　$y=\log_a x \iff x=a^y$



## 5

**[正解] ク：④**

**[解説]**

$$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$$

よって，この関数の値域は，$y \neq 2$ [I]

$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ を $x$ について解くと，

$$(x+1)y=2x-1$$

$$xy+y=2x-1$$

$$(y-2)x=-y-1$$

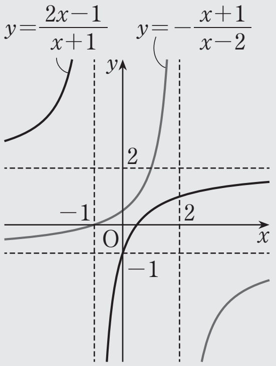
$y \neq 2$ より，$x=-\dfrac{y+1}{y-2}$

よって，逆関数は，[J]

$$\boldsymbol{y=-\frac{x+1}{x-2}}$$

[I]　逆関数の定義域は $x \neq 2$ である。

[J]



# 第 1 講 PART4 確認問題 解答

**1** **[正解]**ア：9，イ：6，ウ：1，エ：3，オ：5

**[解説]**

$f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じである。[A]

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ [B]

$=(3x+1)^2-2$

$=\mathbf{9x^2+6x-1}$

$g(x)$ の値域は $-2$ 以上の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ [C]

$=3(x^2-2)+1$

$=\mathbf{3x^2-5}$

[A] $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているかを確認する。

[B] $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

[C] $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

**2** **[正解]**カ：②，キ：②

**[解説]**

$f(x)$ の値域は実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)と同じである。

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=5^{\log_5 x}$

$=\boldsymbol{x}\quad(x>0)$ [D]

$g(x)$ の値域は正の実数全体で，$f(x)$ の定義域$(x>0)$ と同じである。

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=\log_5 5^x$

$=\boldsymbol{x}$ [E]

[D] $a^{\log_a x}=x$

[E] $\log_a a^x=x$

**3**　**[正解]** ク：②，ケ：④

**[解説]**

$f(x)$ の値域は 0 以上の実数全体で，$g(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= \boldsymbol{\cos x^2}$$ [F]

[F]　$\cos x$ の $x$ の部分に $(f(x)=)x^2$ を代入する。

$g(x)$ の値域は $-1$ 以上 1 以下の実数全体で，$f(x)$ の定義域(実数全体)に含まれる。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (\cos x)^2$$

$$= \boldsymbol{\cos^2 x}$$

# 第 2 講 PART1 確認問題 解答

**1** **[正解]**ア：③

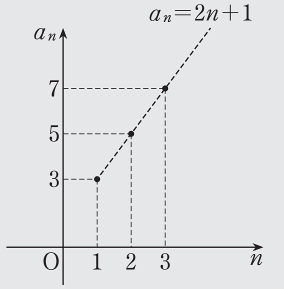
**[解説]**

数列は，

$$3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n+1,\ \cdots$$ [A]

であるから，**正の無限大に発散する。**

[A] $n$ を限りなく大きくすると，$2n+1$ は限りなく大きくなる。




**2** **[正解]**イ：①

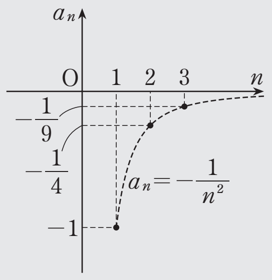
**[解説]**

数列は，

$$-1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \cdots,\ -\frac{1}{n^2},\ \cdots$$ [B]

であるから，**0 に収束する。**

[B] $n$ を限りなく大きくすると，$-\dfrac{1}{n^2}$ は限りなく 0 に近づく。




**3** **[正解]**ウ：④

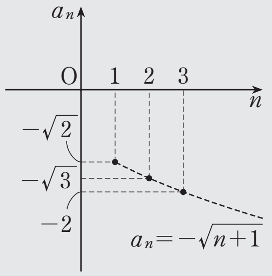
**[解説]**

数列は，

$$-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \cdots,\ -\sqrt{n+1},\ \cdots$$ [C]

であるから，**負の無限大に発散する。**

[C] $n$ を限りなく大きくすると，$-\sqrt{n+1}$ は負の値で，その絶対値は限りなく大きくなる。



**4**　**[正解]** エ：⑤

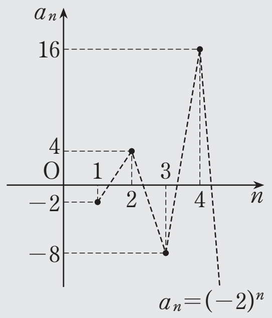
**[解説]**

数列は，

$$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots$$ [D]

であるから，**振動する。**

[D]




**5**　**[正解]** オ：①

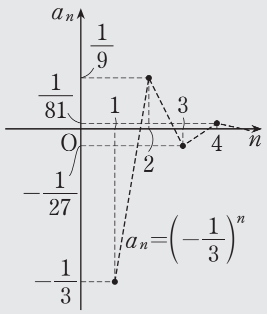
**[解説]**

数列は，

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \cdots$$ [E]

であるから，**0 に収束する。**

[E]　$n$ を限りなく大きくすると，$\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ は限りなく 0 に近づく。




**6**　**[正解]** カ：2

**[解説]**

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=0+2 \quad \text{[F]}$$

$$=\mathbf{2}$$

[F]　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$

**7**　**[正解]** キ：1

**[解説]**

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1-0 \quad \text{[G]}$$

$$=\mathbf{1}$$

[G]　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

**8** **[正解]** ク：2

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{2}{n}\right)=6$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=3$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{6}{3}$$ [H]

$$=\mathbf{2}$$

[H]　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$$ （ただし，$\beta \neq 0$）

# 第 2 講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：⑥

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3}{n}-2\right)$$ [A]

[A]　最も次数が高い $n^2$ でくくる。

$\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-2\right)=-2$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=-\infty$$

## 2

**[正解]** イ：⑤

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)$$ [B]

[B]　最も次数が高い $n^3$ でくくる。

$\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=\infty$$

## 3

**[正解]** ウ：④

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}$$ [C]

[C]　分母・分子を $n^2$ で割る。

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3n}=2$$

**4** **[正解]** エ：①

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$ [D]

[D]　分母・分子を分母における最も次数が高い $n^2$ で割る。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\mathbf{0}$$

**5** **[正解]** オ：⑤

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$$ [E]

[E]　分母・分子を分母における最も次数が高い $n^2$ で割る。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{n^2}\right)=\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+1}=\boldsymbol{\infty}$$

# 第 2 講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解] ア：⑤**

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$ [A]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$$=\infty$$

[A]　分母・分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけ，分母を有理化する。

## 2

**[正解] イ：④**

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\times\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}\times\frac{1}{n}}$$ [B]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{2}{1}$$ [C]

$$=2$$

[B]　分母・分子を $n$ で割る。

[C]　$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1$

## 3　[正解] ウ：①

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$ [D]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\mathbf{0}$$

［D］ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ をかけ，分子を有理化する。

## 4　[正解] エ：②

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$ [E]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$ [F]

$$=\frac{2}{1+1}$$

$$=\mathbf{1}$$

［E］ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{n^2+2n}+n$ をかけ，分子を有理化する。

［F］ 分母・分子を $n$ で割る。

# 第 2 講　PART4 確認問題 解答

**1** [正解] ア：④，イ：③，ウ：0，エ：0，オ：0

[解説]

$-1 \leqq \cos\frac{n\pi}{4} \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4} \leqq \frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$$ [A]

[A]　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ において，すべての自然数 $n$ で $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

**2** [正解] カ：④，キ：③，ク：0，ケ：0，コ：0

[解説]

$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{n+1} \leqq \frac{(-1)^n}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}$$ [B]

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$$

[B]　$-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ の各辺に $\frac{1}{n+1}$ $(>0)$ をかける。

# 第 3 講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：③

**[解説]**

$\frac{4}{3}>1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$$ [A]

よって，**正の無限大に発散する。**

[A]　$r>1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

**2**　**[正解]** イ：①

**[解説]**

$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$ [B]

よって，**0 に収束する。**

[B]　$|r|<1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

**3**　**[正解]** ウ：⑤

**[解説]**

$-3<-1$ だから，[C]

**振動する。**

[C]　$r\leqq-1$ のとき，$\{r^n\}$ は振動し，極限はない。

**4**　**[正解]** エ：①

**[解説]**

$\left|-\frac{2}{5}\right|<1$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=0$$ [D]

よって，**0 に収束する。**

[D]　$|r|<1$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} r^n=0$

**5** **[正解]** オ：⑤

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$ [E]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}4^n=\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\boldsymbol{\infty}$$

[E] $4^n$ でくくる。

**6** **[正解]** カ：③

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{2^n}{3^n}}$$ [F]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=\mathbf{1}$$

[F] 分母・分子を $3^n$ で割る。

**7** **[正解]** キ：1, ク：3, ケ：0, コ：1

**[解説]**

数列 $\{(x-2)^n\}$ は, 公比 $x-2$ の等比数列であるから, この数列が収束するための条件は,

$$-1<x-2\leqq 1$$ [G]

よって, $\boldsymbol{1<x\leqq 3}$

極限値は,

$-1<x-2<1$, すなわち $1<x<3$ のとき,

**0** [H]

$x-2=1$, すなわち $x=3$ のとき, [I]

**1**

[G] 数列 $\{r^n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow$ $-1<r\leqq 1$

[H] $|r|<1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

[I] 数列は
1, 1, 1, …
となる。

# 第 3 講　PART2 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：2，イ：3，ウ：②

**[解説]**

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad \cdots\cdots①$$

①の $a_{n+1}$，$a_n$ を $\alpha$ に置き換えて，[A]

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$$

$$\alpha=2$$

よって，$2=\frac{1}{2}\cdot 2+1 \quad \cdots\cdots②$

①−②より，

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

また，$a_1-2=5-2=3$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 3，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{a_n=2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$-1<\frac{1}{2}<1$ より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$ [B]

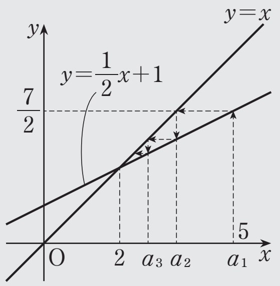
[A]　$a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列の極限

① $\alpha=p\alpha+q$ を満たす $\alpha$ を求めて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形する。

② 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 $p$ の等比数列であることから，一般項 $a_n$ を求める。

③ $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求める。

[B]



**2**　**[正解]** エ：1，オ：5，カ：⑤

**[解説]**

$a_{n+1}=3a_n-2$　……①

①の $a_{n+1}$，$a_n$ を $\alpha$ に置き換えて，[C]

$\alpha=3\alpha-2$

$\alpha=1$

よって，$1=3\cdot1-2$　……②

①−②より，

$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

また，$a_1-1=6-1=5$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 5，公比 3 の等比数列であるから，

$a_n-1=5\cdot3^{n-1}$ [D]

$\boldsymbol{a_n=1+5\cdot3^{n-1}}$

$3>1$ より，$\lim_{n\to\infty}3^{n-1}=\infty$ であるから，

$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\infty}$

[C]　$a_{n+1}=pa_n+q$ で表される数列の極限
① $\alpha=p\alpha+q$ を満たす $\alpha$ を求めて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形する。
② 数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 $p$ の等比数列であることから，一般項 $a_n$ を求める。
③ $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求める。

[D]　初項 $a$，公比 $r$ の等比数列の第 $n$ 項は，$ar^{n-1}$

# 第 4 講 PART1 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：③

**[解説]**

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

と変形できるから，第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ は，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+$$

$$\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は，[A]

**収束し，その和は $\frac{1}{2}$**

[A]　無限級数の収束

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の部分和 $S_n$ について，$S_n$ が $S$ に収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し，その和は $S$ である。

## 2 [正解] イ：④

**[解説]**

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})}$$

[B]

$$=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(2n-1)-(2n+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

よって，第 $n$ 項までの部分和 $S_n$ は，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+$$

$$\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\right\}=\infty$

[C]

したがって，この無限級数は，

**発散する**

[B]　分母・分子に $\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}$ をかけ，分母を有理化する。

[C]　無限級数の発散
無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の部分和 $S_n$ について，$S_n$ が発散するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散する。

# 第 4 講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：②

**[解説]**

初項は 9，公比は $-\dfrac{4}{3}$ で，

$\left|-\dfrac{4}{3}\right| \geqq 1$ であるから，

この無限等比級数は，**発散する。** [A]

> [A]　無限等比級数の収束と発散
> 無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots$
> $\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ において，
> ①　$a \neq 0$ のとき
> 　$|r|<1$ ならば収束し，
> 　その和は，$\dfrac{a}{1-r}$
> 　$|r| \geqq 1$ ならば，発散
> ②　$a=0$ のとき
> 　収束し，その和は 0

**2**

**[正解]** イ：①，ウ：2，エ：3，オ：3

**[解説]**

初項は $\sqrt{3}$，公比は $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

$|\sqrt{3}-1|<1$ であるから，

この無限等比級数は，**収束する。**

その和は，

$$\frac{\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{4-3}=\mathbf{2\sqrt{3}+3}$$

**3**

**[正解]** カ：2，キ：0，ク：0，ケコ：−1

**[解説]**

初項は $x$，公比は $x+1$ であるから，この無限等比級数が収束するための条件は，

$x=0$

または $-1<x+1<1$　……①　[B]

①より，$-2<x<0$

よって，求める $x$ の値の範囲は，

$\boldsymbol{-2<x\leqq 0}$

$x=0$ のとき，和は，**0**　[C]

$-2<x<0$ のとき，和は，

$$\frac{x}{1-(x+1)}=\frac{x}{-x}=\boldsymbol{-1}$$

[B]　無限等比級数の収束条件
無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots$ の収束条件は，
$a=0$ または $|r|<1$

[C]　(初項)$=0$ と(初項)$\neq 0$ の場合に分けて和を求める。

# 第 4 講　PART3 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：②

**[解説]**

第 $n$ 項 $a_n$ は

$$a_n=\frac{n}{2n+1}$$ [A]

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，無限級数は，**発散する**。[B]

[A]　$a_n$ を $n$ の式で表す。

[B]　無限級数の収束・発散
数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない
$\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する

**2**　**[正解]** エ：3，オ：2

**[解説]**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は，初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数

公比について，$\left|\frac{2}{3}\right|<1$，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ はともに収束し，その和はそれぞれ，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$ [C]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ [D]

> [C]　無限等比級数
>
> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$ において，
>
> $|r|<1$ ならば収束し，
>
> その和は，$\dfrac{a}{1-r}$

> [D]　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束し，その和がそれぞれ $S$，$T$ であるとき，
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n+lb_n)=kS+lT$$
>
> （$k$，$l$ は定数）

# 第 5 講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：7

**[解説]**

$$\lim_{x\to3}\left(x^2-2x+4\right)=7$$ [A]

[A]　$x\to3$ のとき，
$x^2-2x+4\to7$

**2**　**[正解]** イ：1

**[解説]**

$$\lim_{x\to4}\frac{2x-5}{x-1}=1$$ [B]

[B]　$x\to4$ のとき，
$\frac{2x-5}{x-1}\to1$

**3**　**[正解]** ウ：4

**[解説]**

$$\lim_{x\to5}\sqrt{3x+1}=\sqrt{16}$$ [C]
$$=4$$

[C]　$x\to5$ のとき，
$\sqrt{3x+1}\to4$

**4**　**[正解]** エ：4

**[解説]**

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-12}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$ [D]
$$=\lim_{x\to2}\frac{3(x+2)}{x+1}$$
$$=\frac{3\cdot4}{3}=4$$

[D]　分母・分子を因数分解し，$(x-2)\ (\neq0)$ で約分する。

**5**

**[正解]** オ：2

**[解説]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(4-\frac{8}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{4(x+2)-8}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{x+2}$$ [E]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+2}$$

$$=\frac{4}{2}=\mathbf{2}$$

[E]　$x \fallingdotseq 0$ として，分母・分子を $x$ で約分する。

**6**

**[正解]** カ：1，キ：2

**[解説]**

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$ [F]

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)-1}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

[F]　分母・分子に $\sqrt{x+3}+1$ をかけ，分子を有理化する。

# 第 5 講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** アイ：$-1$，ウ：$2$

**[解説]**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+a}{x-1} = b \quad \cdots\cdots ①$$

$\lim_{x \to 1}(x-1)=0$ であるから，①が成り立つとき，

$$\lim_{x \to 1}(x^2+a)=0$$ [A]

すなわち，$1+a=0$

$$a=-1$$

このとき，

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+a}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

以上より，

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$$

[A]　分母 → 0 となる分数式が収束するための条件

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$

かつ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ならば，$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

**2** **[正解]** エ：0，オ：2，カ：4，キ：4，ク：5，
ケ：6

**[解説]**

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

$\lim_{x\to -2}(x+2)=0$ であるから，②が成り立つとき，

$$\lim_{x\to -2}\left(x^2+ax+b\right)=\mathbf{0}$$ [B]

すなわち，$4-2a+b=0$

$$\boldsymbol{b=2a-4} \quad \cdots\cdots (*)$$

このとき，

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+(2a-4)}{x+2}$$ [C]

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x+a-2)=\boldsymbol{a-4}$$

②より，$a-4=1$

$$\boldsymbol{a=5}$$

$(*)$より，$\boldsymbol{b=6}$

[B]　分母 → 0 となる分数式が収束するための条件

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

かつ $\lim_{x\to a}g(x)=0$

ならば，$\lim_{x\to a}f(x)=0$

[C]　②の左辺に$(*)$の右辺を代入する。

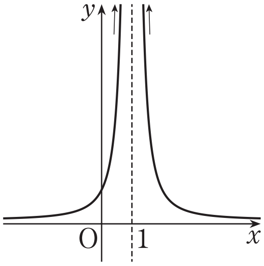
# 第 5 講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：⑤

**[解説]**

$y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ のグラフは，次のようになる。




[A]

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

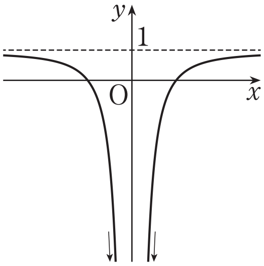
[A]　$x\to1+0$，$x\to1-0$ のいずれも $y\to\infty$ となる。

## 2

**[正解]** イ：⑥

**[解説]**

$y=1-\dfrac{2}{x^2}$ のグラフは，次のようになる。




[B]

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$

[B]　$x\to+0$，$x\to-0$ のいずれも $y\to-\infty$ となる。

## 3

**[正解]** ウ：⑤

**[解説]**

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}=\infty$ [C]

[C]　$y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ では，$x\to3+0$，$x\to3-0$ のいずれも $y\to\infty$ となる。

## 4

**[正解]** エ：③

**[解説]**

$x > 2$ のとき，[D]

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x-2}{x-2} = \mathbf{1}$$

[D]　$x \to 2+0$(右側極限)であるから，$x>2$ の場合を考える。

## 5

**[正解]** オ：④

**[解説]**

$x < 2$ のとき，[E]

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{-(x-2)}{x-2} = \mathbf{-1}$$

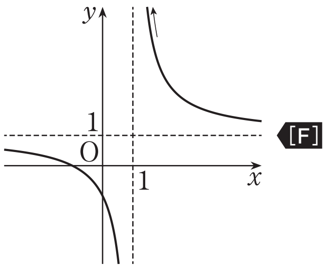
[E]　$x \to 2-0$(左側極限)であるから，$x<2$ の場合を考える。

## 6

**[正解]** カ：⑤

**[解説]**

$y = \dfrac{2}{x-1} + 1$ のグラフは，次のようになる。



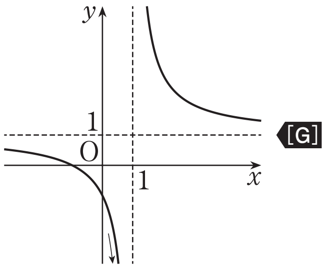

[F]　$x \to 1+0$(右側極限)であるから，1 より大きい値をとりながら 1 に近づける。

よって，$\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \left( \frac{2}{x-1} + 1 \right) = \infty$

## 7 [正解] キ：⑥

**[解説]**

$y=\dfrac{2}{x-1}+1$ のグラフは，次のようになる。




[G]　$x \to 1-0$（左側極限）であるから，1より小さい値をとりながら1に近づける。

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=-\infty$

# 第 5 講　PART4 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：③

**[解説]**

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ であるから，[A]

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\mathbf{1}$$

[A]　$x\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{x^2}$ は限りなく 0 に近づく。

## 2

**[正解]** イ：⑥

**[解説]**

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{3}{x}-2\right) \quad \text{[B]}$$

$$=-\infty$$

[B]　最高次の項 $x^2$ でくくる。

## 3

**[正解]** ウ：①

**[解説]**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}} \quad \text{[C]}$$

$$=\mathbf{0}$$

[C]　分母・分子を分母の最高次の項 $x^2$ で割る。

## 4

**[正解]** エ：⑥

**[解説]**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2+\dfrac{1}{x^2}} \quad \text{[D]}$$

$$=-\infty$$

[D]　分母・分子を $x^2$ で割る。

## 5

**[正解] オ：④**

**[解説]**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$ [E]

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x+3)-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$ [F]

$$=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}$$

[E]　$\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}-x}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{x^2-2x+3}+x$ をかけ，分子を有理化する。

[F]　分母・分子を $x$ で割る。

## 6 [正解] カ：④

**[解説]**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x}-x} \quad \text{[G]}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} \quad \text{[H]}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=-1-1=-2$ であるから，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\frac{2}{-2}=\mathbf{-1}$$

[G]　$\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{1}$ の分母・分子に $\sqrt{x^2+2x}-x$ をかけ，分子を有理化する。

[H]　$x\to-\infty$ であるので，ここでは $x<0$ と考える。このとき，$\sqrt{x^2}=-x$ であることに注意。

（別解）

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-2t}-t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-2t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-2t}+t\right)}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-2t)-t^2}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-2t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1} \quad \text{[I]}$$

$$=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}$$

[I]　分母・分子を $t$ で割る。このとき $t>0$ だから，$t=\sqrt{t^2}$ である。

## 7　[正解] キ：③

**[解説]**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3^x}{5^x}}{1+\dfrac{3^x}{5^x}}\quad\text{[J]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=1$ である

から，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$$

[J]　分母・分子を $5^x$ で割る。

## 8　[正解] ク：⑤

**[解説]**

$x\to+0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\to\infty$ [K]

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_3\frac{1}{x}=\boldsymbol{\infty}$

（別解）

$\log_3\dfrac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$ であるから，

$$\lim_{x\to+0}\log_3\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}(-\log_3 x)\quad\text{[L]}$$

$$=\boldsymbol{\infty}$$

[K]　$x\to+0$ のときの真数 $\dfrac{1}{x}$ の極限を調べる。

[L]　$x\to+0$ のとき，$\log_3 x\to-\infty$

# 第 6 講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：3，イ：2

**[解説]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 1 \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{3}{2}$$

[A]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

**2**　**[正解]** ウ：3，エ：4

**[解説]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

[B]　分母・分子を $\dfrac{\sin x}{x}$ の形に変形する。

**3**　**[正解]** オ：2

**[解説]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{[C]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x} \quad \text{[D]}$$

$$=1\cdot\frac{2}{1} \quad \text{[E]}$$

$$=2$$

[C]　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

[D]　$\dfrac{\sin x}{x}$ の形を作る。

[E]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos 2x=\cos 0=1$

## 4

**[正解]** カ：1，キ：2

**[解説]**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)} \quad \text{[F]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x} \quad \text{[G]}$$

$$=1\cdot\frac{1}{1+1}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

[F]　分母・分子に $1+\cos x$ をかける。

[G]　$\dfrac{\sin x}{x}$ の形を作る。

# 第 6 講 PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：1

**[解説]**

$\dfrac{2}{x}=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to 0$ [A]

また，$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{t}$

よって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\sin t$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$
$$=\mathbf{1}$$

[A] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使えるように，0 に収束する文字に置き換える。

## 2

**[正解]** イ：1

**[解説]**

$x-\pi=t$ とおくと，$x\to\pi$ のとき，$t\to 0$ [B]

また，$x=t+\pi$

よって，

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+\pi)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}\quad\text{[C]}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$
$$=1\cdot\frac{1}{1}$$
$$=\mathbf{1}$$

[B] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使えるように，0 に収束する文字に置き換える。

[C] $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

**3** **[正解]** ウ：④，エ：③，オ：0

**[解説]**

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき，

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$ [D]

[D]　関数の極限の性質
$x=a$ の付近で，つねに
$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$
かつ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$
ならば，$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

**4** **[正解]** カ：0，キ：2，ク：①，ケ：④，コ：0

**[解説]**

$-1 \leqq \cos\frac{1}{x} \leqq 1$ であるから，

$$0 \leqq 1-\cos\frac{1}{x} \leqq 2$$

$x \neq 0$ のとき

$$0 \leqq x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \leqq 2x^2$$ [E]

[E]　$x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ についての不等式を作る。

$\lim_{x\to 0}2x^2=0$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=0$$

# 第 6 講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：①

**[解説]**

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+1}=2$$

また，$f(1)=\dfrac{4\cdot 1}{1+1}=2$

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ であるから，

$f(x)$ は $x=1$ で**連続である**。[A]

> [A]　関数の連続性
> 関数 $f(x)$ において，その定義域内の $x$ の値 $a$ に対して，
> ・$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在
> ・$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
> がともに満たされているとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

## 2

**[正解]** イ：0，ウ：3，エ：0，オ：①

**[解説]**

$f(x)$ の定義域は，$x\geqq 3$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\sqrt{x-3}$$ [B]

$$=\mathbf{0}$$

また，$f(3)=\sqrt{3-3}=\mathbf{0}$

$\lim_{x\to 3+0} f(x)=f(3)$ であるから，

$f(x)$ は $x=3$ で**連続である**。

> [B]　定義域が $x\geqq 3$ であるから，$x\to 3+0$（右側極限）を考える。

**3** **[正解]** カ：1，キ：4，ク：2，ケ：6，コ：②

**[解説]**

$1 \leqq x < 2$ のとき，$[x]=\mathbf{1}$ であるから，[C]

$$f(x)=2x$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} 2x = 4$$

$2 \leqq x < 3$ のとき，$[x]=\mathbf{2}$ であるから，

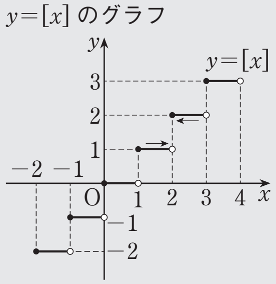
$$f(x)=3x$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} 3x = \mathbf{6}$$

したがって，$\lim_{x \to 2} f(x)$ は存在せず，[D]

$f(x)$ は $x=2$ で**不連続である**。

[C]　$1 \leqq x < 2$, $2 \leqq x < 3$ の 2 つの範囲に分けて $f(x)$ を求める。




[D]　右極限 $x \to 2+0$ と左極限 $x \to 2-0$ が一致しないので，$\lim_{x \to 2} f(x)$ は存在しない。

# 第 6 講　PART4 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：①，イ：②

**[解説]**

$f(x)$ は区間 $[3,\ 4]$ で連続であり，

$$f(3)=9-8=1>0$$

$$f(4)=12-16=-4<0$$

よって，中間値の定理より，[A]

方程式 $f(x)=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

> [A]　中間値の定理の利用
> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x)=0$ は，$a$ と $b$ の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

**2**　**[正解]** ウ：①，エ：④，オ：③

**[解説]**

$$f(x)=\sin x-(1-x)$$

$$=\boldsymbol{\sin x+x-1}$$

とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0,\ \pi]$ で連続であり，

$$f(0)=-1<0$$

$$f(\pi)=\pi-1>0$$

よって，中間値の定理より，[B]

方程式 $f(x)=0$，すなわち $\sin x=1-x$ は，$0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

> [B]　中間値の定理の利用
> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば，方程式 $f(x)=0$ は，$a$ と $b$ の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

# 第 7 講　PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：4，イ：4，ウ：4，エ：②，オ：②

**[解説]**

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，求める接線の傾きは

$f'(4)$ である。

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} \quad \text{[A]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} \quad \text{[B]}$$

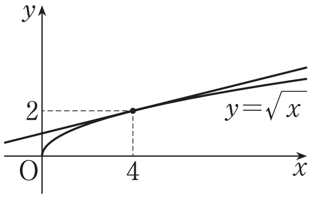
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

よって，求める接線の傾きは $\mathbf{\frac{1}{4}}$




[A]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きが $f'(a)$ である。

[B]　分母・分子に $\sqrt{4+h}+2$ をかけて，分子を有理化する。

**2** **[正解]** カ：1，キ：2，ク：2，ケコ：−2，
サ：②，シ：②

**[解説]**

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(1+h)^2-1|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h^2+2h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h(h+2)|}{h}$$

ここで，

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}(h+2)=2$$ [D]

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h(h+2)|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}(-h-2)=-2$$

よって，右極限と左極限が**一致しない**ので，微分係数 $f'(1)$ は存在しない。

以上より，関数 $f(x)$ は $x=1$ で**微分可能ではない**。[E]

[C]　微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

[D]　右極限と左極限をそれぞれ求める。

[E]　微分係数 $f'(1)$ が存在しないので，$x=1$ で微分可能ではない。

# 第 7 講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：④，イ：②，ウ：⑥

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [A]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\boldsymbol{x+h}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x(x+h)}$$ [B]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{-1}}{x(x+h)}$$

$$=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2}}$$

[A]　導関数の定義
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

[B]　分母・分子が $h$ で約分できる。

## 2

**[正解]** エ：④，オ：①，カ：⑥

**[解説]**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h-1}}-\sqrt{x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

[D]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{1}}{2\sqrt{\boldsymbol{x-1}}}$$

[C]　導関数の定義
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

[D]　分母・分子に $\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}$ をかけて，分子を有理化する。

# 第 7 講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②

**[解説]**

$y'=(2x^4-3x^2+5x+6)'$

$=\mathbf{8x^3-6x+5}$ [A]

[A]　$n$ が正の整数のとき，
$(x^n)'=nx^{n-1}$

## 2

**[正解]** イ：③

**[解説]**

$y'=(-x^5+4x^3+x)'$

$=\mathbf{-5x^4+12x^2+1}$ [B]

[B]　$n$ が正の整数のとき，
$(x^n)'=nx^{n-1}$

## 3

**[正解]** ウ：②

**[解説]**

$y'=(3x+1)'(x^2-x+4)+(3x+1)(x^2-x+4)'$

[C]

$=3(x^2-x+4)+(3x+1)(2x-1)$

$=3x^2-3x+12+6x^2-x-1$

$=\mathbf{9x^2-4x+11}$

[C]　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

## 4

**[正解]** エ：④

**[解説]**

$y'=(x^2+1)'(x^2+x-2)+(x^2+1)(x^2+x-2)'$

[D]

$=2x(x^2+x-2)+(x^2+1)(2x+1)$

$=2x^3+2x^2-4x+2x^3+x^2+2x+1$

$=\mathbf{4x^3+3x^2-2x+1}$

[D]　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

# 第 7 講　PART4 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：④

**[解説]**

$$y'=-\frac{(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$

$$=-\frac{3}{(3x+1)^2}$$ [A]

［A］　商の導関数
$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{1}{\{g(x)\}^2}$$

## 2

**[正解]** イ：③

**[解説]**

$$y'=\frac{(x)'(x^2+2)-x(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{1\cdot(x^2+2)-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$ [B]

［B］　商の導関数
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

## 3

**[正解]** ウ：④

**[解説]**

$$y'=\left(\frac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'$$ [C]

$$=-4x^{-5}$$ [D]

$$=-\frac{4}{x^5}$$

［C］　$x^n$ の形にする。

［D］　$n$ が整数のとき，
$(x^n)'=nx^{n-1}$

## 4 [正解] エ：②

**[解説]**

$$y=\frac{x^3-2x+3}{x^2}=x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$$ より，

$$y'=(x)'-2(x^{-1})'+3(x^{-2})'$$ [E]

$$=1+2x^{-2}-6x^{-3}$$

$$=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^2}-\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x}^3}$$

[E]　$n$ が整数のとき，
$(x^n)'=nx^{n-1}$

(別解)

$$y'=\left(\frac{x^3-2x+3}{x^2}\right)'$$

$$=\frac{(x^3-2x+3)'x^2-(x^3-2x+3)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$$ [F]

$$=\frac{(3x^2-2)x^2-(x^3-2x+3)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{3x^4-2x^2-2x^4+4x^2-6x}{x^4}$$

$$=\frac{x^4+2x^2-6x}{x^4}$$

$$=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^2}-\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x}^3}$$

[F]　商の導関数
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

# 第 8 講　PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②

**[解説]**

$$y' = 4(x^2-3x+4)^3\cdot(x^2-3x+4)'$$ [A]

$$= 4(\boldsymbol{x^2-3x+4})^3(\boldsymbol{2x-3})$$

> [A]　$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
> ここでは，$f(u)=u^4$，$f'(u)=4u^3$
> $u=g(x)=x^2-3x+4$
> $g'(x)=2x-3$
> である。

## 2

**[正解]** イ：④

**[解説]**

$$y' = 5(7-2x^3)^4\cdot(7-2x^3)'$$ [B]

$$= 5(7-2x^3)^4\cdot(-6x^2)$$

$$= \boldsymbol{-30x^2(7-2x^3)^4}$$

> [B]　$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
> ここでは，$f(u)=u^5$，$f'(u)=5u^4$
> $u=g(x)=7-2x^3$，$g'(x)=-6x^2$
> である。

## 3

**[正解]** ウ：④

**[解説]**

$y=(x^2+4)^{-3}$ より，

$$y' = -3(x^2+4)^{-4}\cdot(x^2+4)'$$ [C]

$$= -\frac{3}{(x^2+4)^4}\cdot 2x$$

$$= -\boldsymbol{\frac{6x}{(x^2+4)^4}}$$

> [C]　$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$
> ここでは，$f(u)=u^{-3}$，$f'(u)=-3u^{-4}$
> $u=g(x)=x^2+4$，$g'(x)=2x$
> である。

# 第 8 講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：④，イ：③，ウ：⑥

**[解説]**

$y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$ より，$x=\boldsymbol{y}^5$

$$\frac{dx}{dy}=\mathbf{5}\boldsymbol{y}^4$$

よって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}$$ [A]

$$=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}\sqrt[5]{\boldsymbol{x}^4}}$$

[A]　逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

## 2

**[正解]** エ：②

**[解説]**

$$y'=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$ [B]

$$=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$$

[B]　$r$ が有理数のとき，

$$\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$$

## 3

**[正解]** オ：④

**[解説]**

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$ [C]

$$=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$$

[C]　$r$ が有理数のとき，

$$\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$$

**4**

**[正解]** カ：①

**[解説]**

$$y' = \left\{(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$= \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+5)' \quad \text{[D]}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2x+5}}}$$

[D]　$r$ が有理数のとき,
$(x^r)' = rx^{r-1}$

# 第 9 講 PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解] ア：③**

**[解説]**

$$y'=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)' \quad \text{[A]}$$

$$=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

[A] $(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

## 2

**[正解] イ：③**

**[解説]**

$$y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)' \quad \text{[B]}$$

$$=3\sin^2 x\cos x$$

[B] $(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

## 3

**[正解] ウ：④**

**[解説]**

$y=(\tan x)^{-2}$ であるから，

$$y'=-2(\tan x)^{-3}\cdot(\tan x)' \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{2}{\tan^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=-2\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

[C] $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

## 4

**[正解] エ：②**

**[解説]**

$$y'=(\cos x)'+(x\sin x)'$$

$$=-\sin x+(x)'\sin x+x\cdot(\sin x)' \quad \text{[D]}$$

$$=-\sin x+1\cdot\sin x+x\cdot\cos x$$

$$=x\cos x$$

[D]
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

# 第 9 講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解] ア：③**

**[解説]**

$$y'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \text{ [A]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2x}{x^2+1}}$$

[A]　$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

$\{\log f(x)\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

## 2

**[正解] イ：④**

**[解説]**

$$y'=\frac{(3x)'}{3x\log 5} \text{ [B]}$$

$$=\frac{3}{3x\log 5}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{x\log 5}}$$

[B]　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(\log_a |x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

## 3

**[正解] ウ：③**

**[解説]**

$$y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x} \text{ [C]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

[C]　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$

$\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

## 4

**[正解] エ：②**

**[解説]**

$$y'=(x^2)'\log x+x^2\cdot(\log x)' \text{ [D]}$$

$$=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\boldsymbol{2x\log x+x}$$

[D]
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

# 第 9 講 PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解] ア：④**

**[解説]**

$y' = e^{x^3} \cdot (x^3)'$ [A]

$= \mathbf{3x^2 e^{x^3}}$

[A] $(e^x)' = e^x$

$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

## 2

**[正解] イ：④**

**[解説]**

$y' = (x)' \cdot 2^x + x \cdot (2^x)'$ [B]

$= 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \log 2$ [C]

$= \mathbf{(1 + x\log 2) \cdot 2^x}$

[B]
$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

[C] $(a^x)' = a^x \log a$

## 3

**[正解] ウ：③**

**[解説]**

$y' = \dfrac{(e^x)'x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$ [D]

$= \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4}$

$= \dfrac{xe^x - 2e^x}{x^3}$

$= \mathbf{\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}}$

[D]
$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

## 4

**[正解]** エ：③

**[解説]**

$x>0$ であるから，$y>0$ である。

両辺の自然対数をとると，

$$\log y=\log x^x$$ [E]

$$\log y=x\log x$$

両辺を $x$ で微分すると，

$$\frac{y'}{y}=(x)'\log x+x\cdot(\log x)'$$

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

よって，

$$y'=y(\log x+1)$$ [F]

$$=\boldsymbol{x^x(\log x+1)}$$

[E]　対数微分法を利用する。

[F]　$y$ に $x^x$ を代入する。

# 第 9 講　PART4 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：②，イ：④，ウ：①，エ：③

**[解説]**

$y' = (\cos x)' = \boldsymbol{-\sin x}$ [A]

$y'' = (-\sin x)' = \boldsymbol{-\cos x}$

$y''' = (-\cos x)' = \boldsymbol{\sin x}$

$y^{(4)} = (\sin x)' = \boldsymbol{\cos x}$

[A]　$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

**2**　**[正解]** オ：②，カ：③，キ：⑤，ク：⑥

**[解説]**

$y' = \left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\cdot(2x)' = \boldsymbol{2e^{2x}}$ [B]

$y'' = \left(2e^{2x}\right)' = 2\cdot 2e^{2x} = \boldsymbol{4e^{2x}}$

$y''' = \left(4e^{2x}\right)' = 4\cdot 2e^{2x} = \boldsymbol{8e^{2x}}$

$y^{(4)} = \left(8e^{2x}\right)' = 8\cdot 2e^{2x} = \boldsymbol{16e^{2x}}$

[B]　$(e^x)' = e^x$
$\left\{e^{f(x)}\right\}' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

# 第10講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：③，イ：④

**[解説]**

$y' = -\dfrac{8}{x^2}$ より，$x=2$ のとき，$y'=-2$

よって，接線の方程式は，

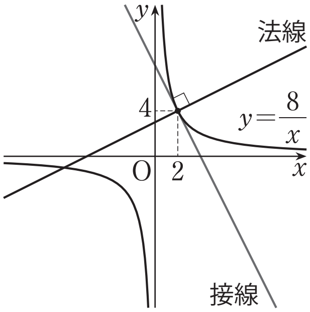
$y-4=-2(x-2)$ [A]

$\boldsymbol{y=-2x+8}$

法線の方程式は，

$y-4=\dfrac{1}{2}(x-2)$ [B]

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+3}$




[A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[B]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a) \neq 0$）

## 2

**[正解]** ウ：③，エ：②

**[解説]**

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ より，$x=4$ のとき，$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，接線の方程式は，

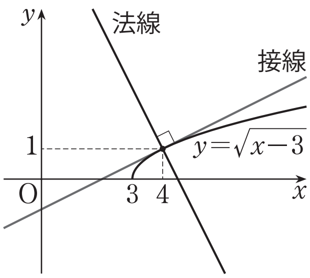
$$y-1=\frac{1}{2}(x-4) \quad \text{[C]}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-1}$$

法線の方程式は，

$$y-1=-2(x-4) \quad \text{[D]}$$

$$\boldsymbol{y=-2x+9}$$




[C]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[D]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

## 3

**[正解]** オ：②，カ：①

**[解説]**

$y'=2\cos x$ より，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$y'=-1$

よって，接線の方程式は，

$$y-\sqrt{3}=-\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$$ [E]

$$\boldsymbol{y=-x+\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}$$

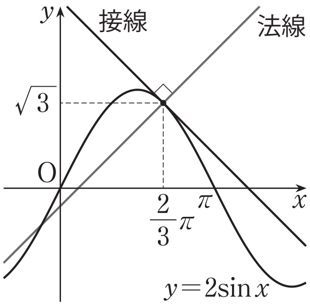
[E]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式は，

$$y-\sqrt{3}=1\cdot\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$$ [F]

$$\boldsymbol{y=x-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}$$

[F]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）



## 4

**[正解]** キ：②，ク：④

**[解説]**

$y'=\dfrac{1}{x}$ より，$x=e$ のとき，$y'=\dfrac{1}{e}$

よって，接線の方程式は，

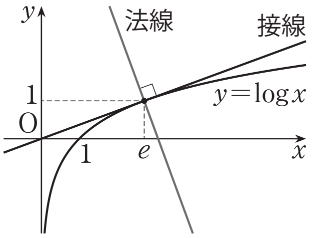
$$y-1=\frac{1}{e}(x-e) \quad \text{[G]}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x}$$

法線の方程式は，

$$y-1=-e(x-e) \quad \text{[H]}$$

$$\boldsymbol{y=-ex+e^2+1}$$




[G]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[H]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

## 5

**[正解]** ケ：②

**[解説]**

$y=e^{-x}$ より，$y'=-e^{-x}$

接点の座標を $(a,\ e^{-a})$ とすると，接線の方程式は，

$$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$$ [I]

> [I]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

すなわち

$$y=-e^{-a}x+ae^{-a}+e^{-a} \quad \cdots\cdots ①$$

①が点 (0，0) を通るので，

$$0=ae^{-a}+e^{-a}$$

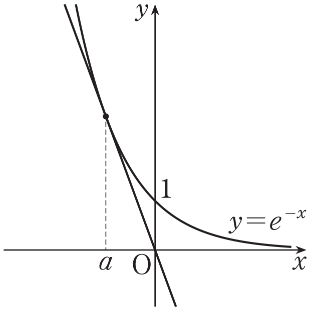
$$0=e^{-a}(a+1)$$

$e^{-a}>0$ より，$a+1=0$

$$a=-1$$

よって，求める接線の方程式は，①より，

$$\boldsymbol{y=-ex}$$



# 第10講　PART2 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：②，イ：④

**[解説]**

$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ の両辺を $x$ で微分すると，

$$2x-\frac{2y}{3}\cdot y'=0$$ [A]

$y\neq 0$ のとき，$y'=\dfrac{3x}{y}$

よって，点 (2，3) における接線の傾きは，

$$\frac{3\cdot 2}{3}=2$$ [B]

したがって，求める接線の方程式は，

$$y-3=2(x-2)$$

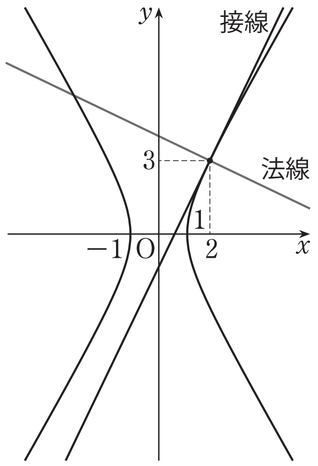
$$\boldsymbol{y=2x-1}$$

また，点 (2，3) における法線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める法線の方程式は，

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+4}$$




[A]　$y^2$ を $x$ で微分すると，

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dy}y^2\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y\cdot y'$$

となる。

[B]　$y'$ の式に $x=2$，$y=3$ を代入する。

## 2 [正解] ウ：④

**[解説]**

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=4\cos t$ より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\cos t}{-2\sin t} \quad \text{[C]}$$

$$=-\frac{2\cos t}{\sin t}$$

[C]　$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{[D]}$$

$$=-2\sqrt{3}$$

[D]　$\dfrac{dy}{dx}$ の式に $t=\dfrac{\pi}{6}$ を代入する。

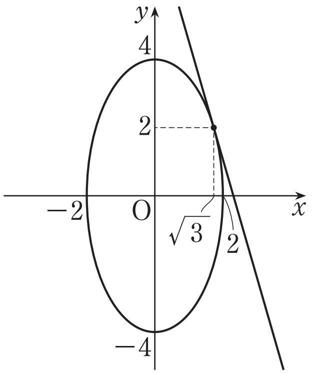
また，接点の座標は，$\left(2\cos\dfrac{\pi}{6},\ 4\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，

$(\sqrt{3},\ 2)$

したがって，求める接線の方程式は，

$y-2=-2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$\boldsymbol{y=-2\sqrt{3}x+8}$



# 第10講　PART3 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：②

**[解説]**

$f(x)$ は区間 $(-1,\ 2)$ で微分可能で，

$$f'(x)=4x-3$$

また，

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{6-9}{3}=-1$$

よって，平均値の定理より，

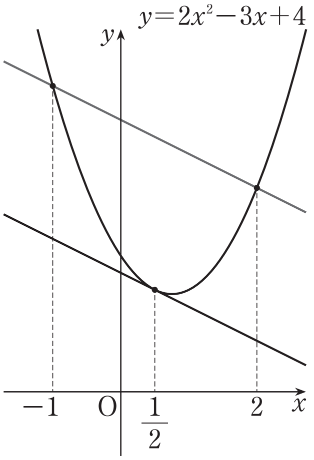
$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$ [A]

を満たす $c$ の値は，

$$4c-3=-1$$

$$\boldsymbol{c=\frac{1}{2}}$$

これは $-1<c<2$ を満たすので適する。

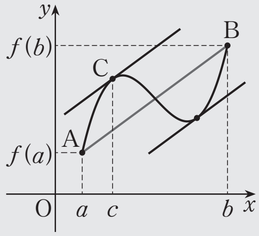



[A]　平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，
開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が（少なくとも 1 つ）存在する。



## 2

**[正解]** イ：5

**[解説]**

$f(x)$ は区間 $(2,\ 10)$ で微分可能で，

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

また，

$$\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=\frac{3-1}{8}=\frac{1}{4}$$

よって，平均値の定理より，

$$\frac{f(10)-f(2)}{10-2}=f'(c)$$ [B]

を満たす $c$ の値は，

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}}=\frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{c-1}=4$$

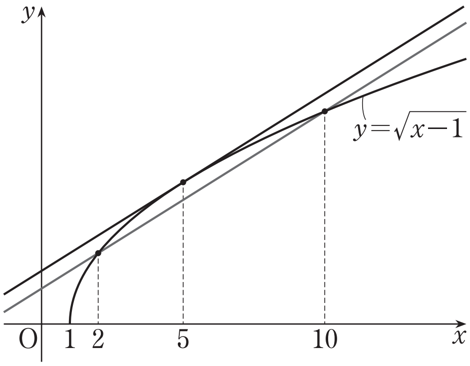
$$\sqrt{c-1}=2$$

両辺を 2 乗して，

$$c-1=4$$

$$\boldsymbol{c=5}$$

これは $2<c<10$ を満たすので適する。



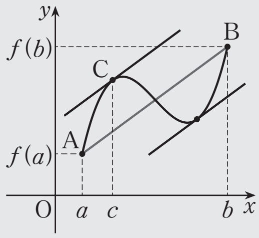

[B]　平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，
開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が（少なくとも 1 つ）存在する。



**3** **[正解]** ウ：③，エ：⑦，オ：⑥，カ：⑤，
キ：④，ク：⑤，ケ：④

**[解説]**

$f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は $x>0$ において微分可能である。

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad \cdots\cdots①$$ [C]

$$a<c<b\quad \cdots\cdots②$$

を満たす実数 $c$ が存在する。

ここで，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，$f'(c)=\dfrac{1}{c}$

②より，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}\quad \cdots\cdots③$

であるから，①，③より，

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

[C]　平均値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$a<c<b$$

を満たす実数 $c$ が（少なくとも1つ）存在する。

# 第11講　PART1 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：②

**[解説]**

関数 $f(x)$ の定義域は，$x>0$

$$f'(x)=-\frac{2}{2x}=-\frac{1}{x}<0$$ [A]

したがって，$f(x)$ は**つねに減少する**

[A]　関数の増減
開区間 $(a,\ b)$ で常に
$f'(x)>0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加
$f'(x)<0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少
$f'(x)=0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数

**2**

**[正解]** イ：1，ウ：②，エ：①

**[解説]**

$$f'(x)=e^x+(x-2)e^x$$ [B]

$$=(x-1)e^x$$

[B]　$f'(x)$
$=(x-2)'e^x+(x-2)\cdot(e^x)'$

$f'(x)=0$ とすると，$x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-e$ | ↗ |

[C]

[C]　増減表を作って，確認する。

したがって，$f(x)$ は，

**$x\leqq 1$ で減少する**

**$1\leqq x$ で増加する**

**3** **[正解]** オ：2，カ：2，キ：2，ク：2，ケ：①，コ：②

**[解説]**

$f(x)$ の定義域は，$x \neq 0$

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

[D] $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$x=\pm 2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-2$ | ↘ | ／ | ↘ | $6$ | ↗ |

したがって，$f(x)$ は

**$x \leqq -2$，$2 \leqq x$ で増加する**

**$-2 \leqq x < 0$，$0 < x \leqq 2$ で減少する**

# 第11講　PART2 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：⑤，イ：9，ウ：4，エ：④，オ：0

**[解説]**

$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x-\sin x$$
$$=\sin x(2\cos x-1)$$

$0<x<2\pi$ の範囲で $f'(x)=0$ となる $x$ の値は，

$\sin x=0$ より，$x=\pi$

$2\cos x-1=0$ より，$\cos x=\frac{1}{2}$ だから，

$$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ |
| $f(x)$ | ／ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | ／ |

[A]

したがって，$f(x)$ は，

**$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$ で極大値 $\frac{9}{4}$**

**$x=\pi$ で極小値 0**

をとる。

> [A]　関数の極値
> $f(x)$ が微分可能で，$f'(a)=0$ であるとき，$x=a$ を境に $f'(x)$ の符号が変わるとき，$f(a)$ は極値である。
> ここで，$f'(x)$ の符号が
> 正から負に変わるならば，
> 　$f(a)$ は極大値
> 負から正に変わるならば，
> 　$f(a)$ は極小値
> である。

**2** **[正解]** カ：2，キ：4，ク：2，ケ：6，コ：0

**[解説]**

関数 $f(x)$ の定義域は，$x \geqq 0$

(i)　$x \geqq 6$ のとき，

$f(x)=(x-6)\sqrt{x}$ であるから，

$x>6$ のとき，

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-6}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$$ [B]

よって，$x>6$ において，つねに $f'(x)>0$

(ii)　$0 \leqq x<6$ のとき，

$f(x)=-(x-6)\sqrt{x}$ であるから，

$0<x<6$ のとき，

$$f'(x)=-\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$$

$0<x<6$ の範囲で $f'(x)=0$ となる $x$ の値は，

$$x=2$$

(i)，(ii)より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 6 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $+$ | 0 | $-$ | ／ | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $4\sqrt{2}$ | ↘ | 0 | ↗ |

[C]

したがって，$f(x)$ は，

**$x=2$ で極大値 $4\sqrt{2}$**

**$x=6$ で極小値 0**

をとる。

[B]　$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

[C]　$f(x)$ は $x=6$ で微分可能ではないが，$x=6$ を境に $f'(x)$ の符号が変わるので，$f(6)$ は極値である。

# 第11講　PART3 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：6，イウ：12，エ：1，オ：0，
カ：7，キ：5，クケ：$-2$

**[解説]**

$f(x)$ の定義域は，$x \neq 3$

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-3)-(x^2-4x+a)\cdot 1}{(x-3)^2}$$ [A]

$$=\frac{x^2-6x+12-a}{(x-3)^2}$$

[A]　$f'(x)$
$$=\frac{(x^2-4x+a)'(x-3)-(x^2-4x+a)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるならば，[B]

$$\boldsymbol{f'(1)=0}$$

[B]　$x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための条件は，「$f'(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わる」

よって，$1-6+12-a=0$ より，

$$\boldsymbol{a=7}$$

逆に，$a=7$ のとき，

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-3}$$ [C]

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

[C]　$a=7$ のときに $f(1)$ が極値となることを確かめる必要がある。

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大<br>$-2$ | ↘ | ／ | ↘ | 極小<br>6 | ↗ |

したがって，$f(x)$ は $x=1$ で極大値 $\boldsymbol{-2}$ をとる。

ゆえに，求める $a$ の値は，$a=7$

# 第11講　PART4 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：1，イ：②，ウ：2，エ：③

**[解説]**

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=2$

よって，$1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $e$ | ↘ | $\frac{e^2}{4}$ | ↗ | $\frac{e^3}{9}$ |

[A]

ここで，$2<e<3$ だから，

$$e-\frac{e^3}{9}=\frac{e}{9}(9-e^2)>0$$ [B]

よって，$e>\frac{e^3}{9}$

したがって，$f(x)$ は，

**$x=1$ のとき最大値 $e$**

**$x=2$ のとき最小値 $\frac{e^2}{4}$**

をとる。

[A]　定義域の範囲で $f(x)$ の増減表をつくる。

[B]　最大値は $e$ と $\frac{e^3}{9}$ のどちらであるかを考える。

**2** **[正解]** オ：2，カ：4，キク：−2，ケコ：−4

**[解説]**

$f(x)$ の定義域は，$8-x^2 \geqq 0$ より，

$$-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$$

$$f'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{(8-x^2)-x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$=-\frac{2(x+2)(x-2)}{\sqrt{8-x^2}}$$

よって，$-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $-2\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ／ |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ |

[C]

[C]　定義域の範囲で $f(x)$ の増減表をつくる。

したがって，$f(x)$ は，

**$x=2$ のとき最大値 4**

**$x=-2$ のとき最小値 −4**

をとる。

# 第12講　PART1 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：③，イ：①，ウ：0，エ：3，オ：1，
カ：2

**[解説]**

$$f'(x)=4x^3-6x^2$$

$$f''(x)=12x^2-12x$$
$$=12x(x-1)$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=0,\ 1$

よって，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 下に凸 | 3 | 上に凸 | 2 | 下に凸 |

したがって，

下に凸となる区間は，$\boldsymbol{x<0,\ 1<x}$ [A]

上に凸となる区間は，$\boldsymbol{0<x<1}$

変曲点は，2 点 **(0，3)，(1，2)** [B]

[A]　曲線の凹凸
関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f''(x)>0$ となる区間では，
　曲線 $y=f(x)$ は下に凸
$f''(x)<0$ となる区間では，
　曲線 $y=f(x)$ は上に凸

[B]　変曲点
$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

## 2

**[正解]** キ：④，ク：②，ケ：2

**[解説]**

$f(x)$ の定義域は，$x>0$

$$f'(x)=\log x+(x+2)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\log x+1+\frac{2}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{x-2}{x^2}$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=2$

よって，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる。

| $x$ | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ／ | 上に凸 | $4\log 2$ | 下に凸 |

したがって，

下に凸となる区間は，$2<x$ [C]

上に凸となる区間は，$0<x<2$

変曲点は，$(2,\ 4\log 2)$ [D]

[C]　曲線の凹凸
関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f''(x)>0$ となる区間では，
曲線 $y=f(x)$ は下に凸
$f''(x)<0$ となる区間では，
曲線 $y=f(x)$ は上に凸

[D]　変曲点
$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

# 第12講 PART2 確認問題 解答

**1** **[正解]** アイ：36，ウ：1，エ：①

**[解説]**

$$f'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{12(x^2+3)^2-12x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=-\frac{12(x^2+3)-48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$=\frac{\mathbf{36}(x^2-\mathbf{1})}{(x^2+3)^3}$$

$$=\frac{36(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

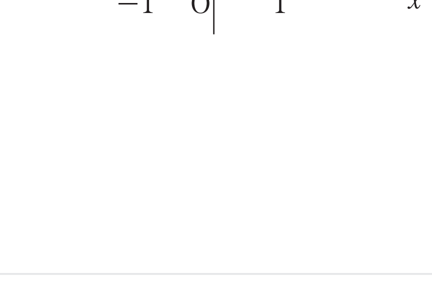
| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ⤴ | $\frac{3}{2}$ | ⤴ | $2$ | ⤵ | $\frac{3}{2}$ | ⤵ |

[A]

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ より，[B]

$x$ 軸はこの曲線の漸近線である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは，次のようになる。




[A]　$f'(x)$ と $f''(x)$ を含めた増減と凹凸の表をつくる。

[B]　$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ または
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$
が成り立つとき，
直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

## 2

**[正解]** オ：2，カ：1，キ：1，ク：②

**[解説]**

定義域は，$x \neq 1$

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{x-1}$$
$$=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}$$
$$=x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\left\{1-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}'$$ [C]
$$=-\frac{-2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ＋ | 0 | － | ／ | － | 0 | ＋ |
| $f''(x)$ | － | － | － | ／ | ＋ | ＋ | ＋ |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | ／ | ↘ | 4 | ↗ |

ここで，$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$ より，

直線 $\boldsymbol{x=1}$ はこの曲線の漸近線である。[D]

また，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$$ [E]

より，直線 $\boldsymbol{y=x+1}$ はこの曲線の漸近線である。

[C]　$\dfrac{1}{(x-1)^2}$ を $(x-1)^{-2}$ と変形してから微分してもよい。

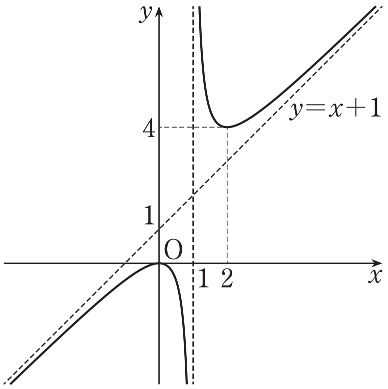
$$\left\{\frac{1}{(x-1)^2}\right\}'=\{(x-1)^{-2}\}'$$
$$=-2(x-1)^{-3}$$
$$=-\frac{2}{(x-1)^3}$$

[D]　$x$ 軸に垂直な漸近線
$\lim_{x\to a+0} f(x)$ または $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が
$\infty$ または $-\infty$ ならば，
直線 $x=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

[E]　$x$ 軸に平行でも垂直でもない漸近線
$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または
$\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$
が成り立つとき，
直線 $y=ax+b$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

したがって，$y=f(x)$ のグラフは，次のように

なる。



# 第12講 PART3 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：2，イ：①，ウ：②

**[解説]**

$$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$$ [A]

$$=(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-1$

$$f''(x)=1\cdot e^x+(x+1)\cdot e^x$$

$$=(x+2)e^x$$

$f''(x)=0$ とすると，$x=-2$

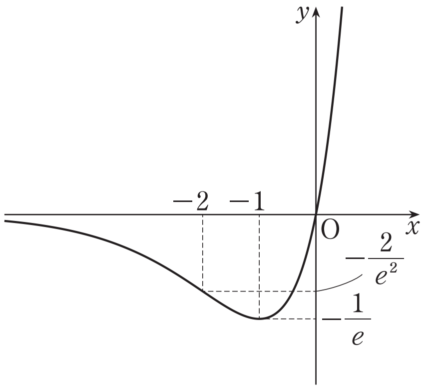
$f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\dfrac{2}{e^2}$ | ↘ | $-\dfrac{1}{e}$ | ↗ |

[B]

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ より，$x$ 軸はこの曲線の漸近線である。[C]

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，次の図のようになる。




[A]　$f'(x)=(x)'e^x+x\cdot(e^x)'$

[B]　$f'(x)$ と $f''(x)$ を含めた増減と凹凸の表をつくる。

[C]　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ または $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ が成り立つとき，直線 $y=a$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

# 第12講 PART4 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：④，イ：①，ウ：7，エオ：−9

**[解説]**

$$f'(x)=4x^3-16x$$
$$=4x(x^2-4)$$
$$=4x(x+2)(x-2)$$
$$f''(x)=12x^2-16$$

$f'(x)=0$ となる $x$ の値は，

$$x=-2,\ 0,\ 2$$

ここで，

$$f''(-2)=32>0$$
$$f''(0)=-16<0$$
$$f''(2)=32>0$$

以上より，

$f'(x)=0$，$f''(x)>0$ を満たす $x$ の値は，$\pm\mathbf{2}$ [A]

$f'(x)=0$，$f''(x)<0$ を満たす $x$ の値は，$\mathbf{0}$

である。

また，

$$f(-2)=-9$$
$$f(0)=7$$
$$f(2)=-9$$

よって，$x=0$ のとき，極大値 **7** [A]

$x=\pm2$ のとき，極小値 $\mathbf{-9}$

をとる。

> [A] 第 2 次導関数と極値
> 関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
> $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$
> ならば，$f(a)$ は極小値
> $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$
> ならば，$f(a)$ は極大値

## 2 [正解] カ：①，キ：③，ク：③，ケ：①

**[解説]**

$$f'(x)=1-2\cos x$$ [B]

$$f''(x)=2\sin x$$

[B]　$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

$f'(x)=0$ より，$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

ここで，

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>0$$

$$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\sin\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}<0$$

以上より，

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,\quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$$ [C]

$$f'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=0,\quad f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)<0$$

[C]　第 2 次導関数と極値
関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$
　ならば，$f(a)$ は極小値
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$
　ならば，$f(a)$ は極大値

となる。

また，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{3}\pi-2\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$$

よって，$x=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，極大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$

をとる。

# 第13講 PART1 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：③，イ：①，ウ：①，エ：0

**[解説]**

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，[A]

$$f'(x)=\mathbf{1-\cos x}$$

$0<x<2\pi$ のとき，$\cos x<1$ だから，

$$1-\cos x>0$$

$$f'(x)>0$$

よって，$f(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に**増加**する。

[B]

また，$f(0)=0-\sin 0=\mathbf{0}$

であるから，$0<x<2\pi$ のとき，

$$f(x)>0$$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$x>\sin x$$

[A]　$f(x)=$(左辺)$-$(右辺)とおいて，$f(x)>0$ を示す。

[B]　$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$ は単調に増加
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$は単調に減少

## 2

**[正解]** オ：③，カ：①，キ：①，ク：0

**[解説]**

$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，[C]

$$g(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$$

$$g'(x)=-\sin x+x$$

$$=\boldsymbol{x-\sin x}$$

(＊)より，$0<x<2\pi$ のとき，$x-\sin x>0$

であるから，$g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $0<x<2\pi$ で単調に**増加**する。

[D]

また，$g(0)=\cos 0-1=\boldsymbol{0}$ であるから，

$0<x<2\pi$ のとき，$g(x)>0$

ゆえに，$0<x<2\pi$ のとき，

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$$

[C]　$g(x)=$(左辺)$-$(右辺)とおいて，$g(x)>0$ を示す。

[D]　$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$ は単調に増加
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$は単調に減少

**3**　**[正解]** ケ：④，コ：1，サ：1

**[解説]**

$h(x)=x-\log x$ とおくと，[E]

$$h'(x)=1-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x}}$$

$h'(x)=0$ となる $x$ の値は，$x=1$

$x>0$ において, $h(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | ／ | ↘ | 1 | ↗ |

[F]

よって，$x>0$ において $h(x)$ は $x=\mathbf{1}$ で最小値 **1** をとる。

したがって，$x>0$ のとき，$h(x)>0$ [G]

すなわち，$x>0$ のとき，$\log x<x$

[E]　$h(x)=$(右辺)$-$(左辺)とおいて，$h(x)>0$ を示す。

[F]　$x>0$ の範囲で増減表をつくる。

[G]　$x>0$ における $h(x)$ の最小値が正であるとき，$x>0$において $h(x)>0$ がいえる。

# 第13講　PART2 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：②，イ：①，ウ：②，エ：1，オ：1

**[解説]**

$f(x)=\sin x-(2x-1)$ [A]

$=\sin x-2x+1$

[A]　$f(x)=$(左辺)−(右辺)とおいて，$f(x)$ の増減を調べる。

とおくと，

$f'(x)=\cos x-2<0$

よって，$f(x)$ は単調に**減少**する。[B]

[B]　$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$ は単調に増加
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$　$f(x)$ は単調に減少

また，$f(0)=\sin 0+1=1>0$

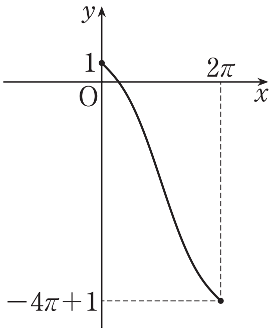
$f(2\pi)=\sin 2\pi-4\pi+1$

$=-4\pi+1<0$

であるから，

$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

のグラフと $x$ 軸の共有点の個数は**1個**である。




[C]

[C]　$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$x$ 軸と1点を共有する。

すなわち，方程式

$\sin x=2x-1$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

の実数解の個数は，

**1個**

**2**　**[正解]** カ：①，キ：②，クケ：$-1$，コ：$0$

**[解説]**

$ae^{-x}=x-1$ の両辺に $e^x$ をかけて，

$$a=(x-1)e^x$$

すなわち，$\boldsymbol{(x-1)e^x=a}$ [D]

$f(x)=(x-1)e^x$ とおくと，

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x-1)e^x$$
$$=xe^x$$

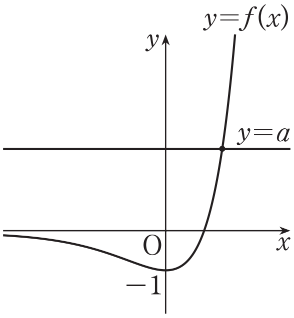
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x=\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$$ [E]

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。




方程式 $ae^{-x}=x-1$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $\boldsymbol{y=a}$ の共有点の個数に等しい。

その個数は，

$\boldsymbol{-1<a<0}$ のとき，　2 個

$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{a\geqq 0}$ のとき，1 個

$\boldsymbol{a<-1}$ のとき，　0 個

[D]　変数 $x$ と定数 $a$ を分離して，($x$ の式) $=a$ の形に変形する。

[E]　$x$ 軸が漸近線となる。

# 第14講　PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②，イ：⑤

**[解説]**

$$v=\frac{dx}{dt}=3\cos 2t\cdot(2t)' \quad \text{[A]}$$

$$=\mathbf{6\cos 2t}$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=-6\sin 2t\cdot(2t)'$$

$$=\mathbf{-12\sin 2t}$$

[A]　速度と加速度
数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が $x=f(t)$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速度 $v$，加速度 $\alpha$ は，

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

## 2

**[正解]** ウ：④，エ：②

**[解説]**

$$v=\frac{dy}{dt}=\mathbf{10-gt} \quad \text{[B]}$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\mathbf{-g}$$

[B]　速度と加速度
数直線上を運動する点Pの座標 $x$ が $x=f(t)$ と表されるとき，時刻 $t$ における点Pの速度 $v$，加速度 $\alpha$ は，

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

ただし，ここでは，点Pの座標は高さ $y=f(t)$ と表される。

# 第 14 講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：4，イ：4，ウ：5，エ：0，オ：2，
カ：2

**[解説]**

速度を $\vec{v}$ とする。

$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t-1$ より，

$$\vec{v}=(2,\ 2t-1)$$ **[A]**

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(2t-1)^2}$$

$$=\sqrt{\mathbf{4t^2-4t+5}}$$

また，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$ より，

$$\vec{\alpha}=(\mathbf{0},\ \mathbf{2})$$

$$|\vec{\alpha}|=\mathbf{2}$$

> [A]　速度と加速度
> 座標平面上を運動する点Pの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 $t$ の関数として表されているとき，
> 速度　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$
> 速さ　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$
> 加速度　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$
> 加速度の大きさ
> $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

## 2 **[正解]** キ：6，ク：④，ケコ：18

**[解説]**

速度を $\vec{v}$ とする。[B]

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 3t\cdot(3t)'=-6\sin 3t$$

$$\frac{dy}{dt}=2\cos 3t\cdot(3t)'=6\cos 3t$$

より，$\vec{v}=(-6\sin 3t,\ 6\cos 3t)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-6\sin 3t)^2+(6\cos 3t)^2}$$

$$=\sqrt{36(\sin^2 3t+\cos^2 3t)}$$ [C]

$$=\mathbf{6}$$

また，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-6\cos 3t\cdot(3t)'=-18\cos 3t$$ [D]

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-6\sin 3t\cdot(3t)'=-18\sin 3t$$

より，$\vec{\alpha}=\boldsymbol{(-18\cos 3t,\ -18\sin 3t)}$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-18\cos 3t)^2+(-18\sin 3t)^2}$$

$$=\sqrt{18^2(\cos^2 3t+\sin^2 3t)}$$

$$=\mathbf{18}$$

[B]　速度
$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

[C]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[D]　加速度
$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

# 第14講　PART3 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：①，イ：④

**[解説]**

$$(\sin x)' = \cos x$$

$h \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + \cos a \cdot h \quad \text{[A]}$$

$$= \mathbf{\sin a + h\cos a}$$

$61^\circ = 60^\circ + 1^\circ = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}$ より，[B]

$$\sin 61^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1.732 + 0.0174)$$

$$= 0.8747 \fallingdotseq \mathbf{0.875}$$

[A]　1 次の近似式
$h \fallingdotseq 0$ のとき，
$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$

[B]　$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$（ラジアン）

**2**　**[正解]** ウ：1，エ：5，オ：①

**[解説]**

$f(x) = (1+x)^5$ とおくと，

$$f'(x) = 5(1+x)^4$$

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = 5$$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \mathbf{1+5x} \quad \text{[C]}$$

したがって，

$$1.002^5 = (1+0.002)^5$$

$$= f(0.002) \quad \text{[D]}$$

$$\fallingdotseq 1 + 5 \times 0.002$$

$$= \mathbf{1.01}$$

[C]　1 次の近似式
$x \fallingdotseq 0$ のとき，
$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$

[D]　上で求めた式に $x = 0.002$ を代入する。

**3**　**[正解]** カ：1，キ：3，ク：②

**[解説]**

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{3}$$

よって，$x\fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x)\fallingdotseq \mathbf{1+\frac{1}{3}x}$$ [E]

したがって

$$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{125+3}$$

$$=\sqrt[3]{5^3\left(1+\frac{3}{5^3}\right)}$$

$$=5\sqrt[3]{1+\frac{3}{5^3}}$$

$$=5f\left(\frac{3}{5^3}\right)$$ [F]

$$\fallingdotseq 5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5^3}\right)$$

$$=5+\frac{1}{5^2}$$

$$=\mathbf{5.04}$$

[E]　1 次の近似式
$x\fallingdotseq 0$ のとき，
$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

[F]　$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ より $x=\frac{3}{5^3}$ を代入する。

# 第15講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：①

**[解説]**

$$\int \frac{2}{x^3}dx = \int 2x^{-3}dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C \quad \text{[A]}$$

$$= -x^{-2}+C$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}+C}$$

[A]　$x^\alpha$ の不定積分
$\alpha \neq -1$ のとき，
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

**2**　**[正解]** イ：④

**[解説]**

$$\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}+C \quad \text{[B]}$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C}$$

[B]　$x^\alpha$ の不定積分
$\alpha \neq -1$ のとき，
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

## 3

**[正解] ウ：③**

**[解説]**

$$\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$ [C]

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$ [D]

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C}$$

[C]　$x^{\alpha}$ の形で表す。

[D]　不定積分の基本性質

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

（$k$ は定数）

② $\int\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

③ $\int\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

## 4

**[正解] エ：③**

**[解説]**

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x}dx$$

$$=\int\left(x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\int x^{-\frac{2}{3}}dx-\int\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{-\frac{2}{3}+1}-\log|x|+C$$ [E]

$$=3x^{\frac{1}{3}}-\log|x|+C$$

$$=\boldsymbol{3\sqrt[3]{x}-\log|x|+C}$$

[E]　$\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C$

# 第15講 PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：④

**[解説]**

$$\int(\sin x+3\cos x)dx=\int\sin x dx+3\int\cos x dx$$
$$=\boldsymbol{-\cos x+3\sin x+C} \quad \text{[A]}$$

[A] $\int\sin x dx=-\cos x+C$
$\int\cos x dx=\sin x+C$

## 2

**[正解]** イ：②

**[解説]**

$$\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$=\int\cos x dx+\int\frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \text{[B]}$$
$$=\boldsymbol{\sin x+\tan x+C}$$

[B] $\int\cos x dx=\sin x+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

## 3

**[正解]** ウ：③

**[解説]**

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x\tan x}=\int\frac{dx}{\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}} \quad \text{[C]}$$
$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{\tan x}+C} \quad \text{[D]}$$

[C] $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

[D] $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$

## 4

**[正解]** エ：④

**[解説]**

$$\int(3e^x+3^x)dx=3\int e^x dx+\int 3^x dx$$
$$=\boldsymbol{3e^x+\frac{3^x}{\log 3}+C} \quad \text{[E]}$$

[E] $\int e^x dx=e^x+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

# 第15講 PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：③

**[解説]**

$$\int\sqrt{2x-1}\,dx=\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x-1)^{\frac{1}{2}+1}+C \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\mathbf{\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C}$$

[A]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\sqrt{t}$，
$f(2x-1)=\sqrt{2x-1}$ と考える。

## 2

**[正解]** イ：③

**[解説]**

$$\int\frac{6}{3x+1}dx=6\int\frac{dx}{3x+1}$$

$$=6\cdot\frac{1}{3}\log|3x+1|+C \quad \text{[B]}$$

$$=\mathbf{2\log|3x+1|+C}$$

[B]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\frac{1}{t}$，
$f(3x+1)=\frac{1}{3x+1}$ と考える。

## 3

**[正解]** ウ：④

**[解説]**

$$\int\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta=\frac{1}{3}\cdot\left\{-\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}+C \quad \text{[C]}$$

$$=\mathbf{-\frac{1}{3}\cos\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)+C}$$

[C]　$f(ax+b)$の不定積分
$F'(x)=f(x)$，$a\neq0$のとき，
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$
ここでは，$f(t)=\sin t$，
$f\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ と考える。

**4** **[正解]** エ：④

**[解説]**

$$\int(e^{3x}+5^{2x-1})dx=\int e^{3x}\,dx+\int 5^{2x-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2x-1}}{\log 5}+C \quad \text{[D]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{5^{2x-1}}{2\log 5}+C}$$

[D] $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

$\int a^{x}\,dx=\dfrac{a^{x}}{\log a}+C$

# 第15講　PART4 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：③

**[解説]**

$$\frac{x^2+2x-1}{x+3}=\frac{(x+3)(x-1)+2}{x+3}=x-1+\frac{2}{x+3}$$

[A]

[A]　分子の次数を下げる。

であるから，

$$\int\frac{x^2+2x-1}{x+3}dx=\int\left(\boldsymbol{x-1+\frac{2}{x+3}}\right)\boldsymbol{dx}$$

$$=\int(x-1)dx+2\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2-x+2\log|x+3|+C}$$

## 2

**[正解]** エ：2，オ：1，カ：②

**[解説]**

$$\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}=\frac{2x^2(x+1)+1}{x(x+1)}$$

$$=2x+\frac{1}{x(x+1)}$$ [B]

[B]　分子の次数を下げる。

であるから，

$$\int\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}dx=\int\left\{\boldsymbol{2x+\frac{1}{x(x+1)}}\right\}\boldsymbol{dx}$$

$$=\int\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

[C]

[C]　部分分数に分解する。
$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$=x^2+\log|x|-\log|x+1|+C$$

$$=\boldsymbol{x^2+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+C}$$

**3**　**[正解]** キ：1，ク：2，ケ：④

**[解説]**

$\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+3}$ とおき，分母をはらうと，[D]

$$3x+5=a(x+3)+b(x+1)$$
$$=(a+b)x+(3a+b)$$

これが $x$ についての恒等式であるから，

$$\begin{cases}a+b=3\\3a+b=5\end{cases}$$ [E]

これを解いて，$a=1$，$b=2$

よって，

$$\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$
$$=\log|x+1|+2\log|x+3|+C$$
$$=\log|x+1|+\log(x+3)^2+C$$
$$=\log|x+1|(x+3)^2+C$$

[D]　部分分数に分解する。

[E]　$x$ についての恒等式
両辺の係数を比較すると，$x$ の同じ次数の項の係数は等しくなる。

# 第15講　PART5 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：④

**[解説]**

$\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$ であるから，[A]

$$\int \sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x)+C$$
$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

[A]　2倍角の公式
$\sin 2x=2\sin x\cos x$
$\Longleftrightarrow\quad \sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$

**2**　**[正解]** イ：③

**[解説]**

$\cos^2 3x=\dfrac{1+\cos 6x}{2}$ であるから，[B]

$$\int \cos^2 3x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 6x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$$

[B]　2倍角の公式
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$
$\Longleftrightarrow\quad \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

**3** **[正解]** ウ：2，エ：4，オ：2，カ：④

**[解説]**

$$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x)\quad \text{[C]}$$

[C]　積→和の公式
$\sin\alpha\cos\beta$
$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

であるから，

$$\int\sin 3x\cos x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

**4** **[正解]** キ：③

**[解説]**

$$\cos 4x\cos 3x=\frac{1}{2}\{\cos(4x+3x)+\cos(4x-3x)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)\quad \text{[D]}$$

[D]　積→和の公式
$\cos\alpha\cos\beta$
$=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

であるから，

$$\int\cos 4x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x+\sin x\right)+C$$

$$=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

## 5 [正解] ク：④

**[解説]**

$$\sin x\sin 4x=-\frac{1}{2}\{\cos(x+4x)-\cos(x-4x)\}$$ [E]

$$=-\frac{1}{2}(\cos 5x-\cos 3x)$$ [F]

であるから，

$$\int \sin x\sin 4x dx=-\frac{1}{2}\int(\cos 5x-\cos 3x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)+C$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x+C}$$

[E]　積→和の公式
$\sin\alpha\sin\beta$
$=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

[F]　$\cos(-\theta)=\cos\theta$

# 第16講 PART1 確認問題 解答

**1**

**[正解]** アイ：10，ウ：6，エ：②

**[解説]**

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$

$x=t^2-1$ より，$dx=2tdt$ [A]

$$\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx=\int\{5(t^2-1)+2\}t\cdot 2tdt$$ [B]

$$=\int(10t^4-6t^2)dt$$

$$=2t^5-2t^3+C$$

$$=2t^3(t^2-1)+C$$

$$=2(\sqrt{x+1})^3\cdot x+C$$

$$=\mathbf{2x(x+1)\sqrt{x+1}+C}$$

[A] $\sqrt{\phantom{x}}$ の部分を $t$ で置き換える。$x=g(t)$ と表され $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ となる。

[B] 置換積分法①
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$
ただし，$x=g(t)$

**2**

**[正解]** オ：3，カ：③

**[解説]**

$x-2=t$ とおくと，$x=t+2$ より，

$$dx=dt$$

$$\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{t+3}{t^2}dt$$ [C]

$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt$$

$$=\log|t|-\frac{3}{t}+C$$

$$=\mathbf{\log|x-2|-\frac{3}{x-2}+C}$$

[C] 置換積分法①
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$
ただし，$x=g(t)$

# 第16講 PART2 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：②，イ：③，ウ：④

**[解説]**

$x^3+2=u$ とおくと，$\boldsymbol{3x^2\,dx}=du$

$$\int x^2(x^3+2)^5\,dx=\int\frac{1}{3}\cdot(x^3+2)^5\cdot 3x^2\,dx$$
$$=\int\frac{1}{3}u^5\,du \quad \text{[A]}$$
$$=\frac{1}{18}u^6+C$$
$$=\frac{1}{18}(x^3+2)^6+C$$

[A]　置換積分法②

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$$

ただし，$g(x)=u$

**2** **[正解]** エ：②，オ：④，カ：①

**[解説]**

$x^2+1=u$ とおくと，$\boldsymbol{2xdx}=du$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2xdx$$
$$=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du \quad \text{[B]}$$
$$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}}+C \quad \text{[C]}$$
$$=\sqrt{u}+C$$
$$=\sqrt{x^2+1}+C$$

[B]　置換積分法②

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$$

ただし，$g(x)=u$

[C]　$\alpha\neq-1$ のとき，

$$\int x^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$$

**3**　**[正解] キ：③**

**[解説]**

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx=\int \frac{\left(e^x+x\right)'}{e^x+x}dx \quad \text{[D]}$$

$$=\log|e^x+x|+C$$

[D]　$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

**4**　**[正解] ク：②**

**[解説]**

$$\int \frac{dx}{\tan x}=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \quad \text{[E]}$$

$$=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx \quad \text{[F]}$$

$$=\log|\sin x|+C$$

[E]　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

[F]　$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

# 第16講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：③

**[解説]**

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x \cdot (\sin x)' dx \quad \text{[A]}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}\sin^5 x + C}$$

[A]　$\alpha \neq -1$ のとき，

$$\int \{f(x)\}^{\alpha} f'(x) dx = \frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ここでは，$f(x) = \sin x$，$\alpha = 4$ となる。

## 2

**[正解]** イ：④

**[解説]**

$\tan x = u$ とおくと，$\dfrac{dx}{\cos^2 x} = du$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{[B]}$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\tan^2 x + C}$$

[B]　$\displaystyle\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$

ただし，$g(x) = u$

**3**　**[正解]** ウ：②，エオ：$-2$，カ：③

**[解説]**

$$\frac{2}{\sin x}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}$$ [C]

[C]　分母・分子に $\sin x$ をかける。

$\cos x=u$ とおくと，$\boldsymbol{-\sin x dx}=du$

$$\int\frac{2}{\sin x}dx=\int\frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{-2}{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)dx$$

[D]

[D]　$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$
ただし，$g(x)=u$

$$=\int\boldsymbol{\frac{-2}{1-u^2}du}$$

$$=\int\frac{2}{(u+1)(u-1)}du$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$ [E]

[E]　部分分数に分解する。

$$=\log|u-1|-\log|u+1|+C$$

$$=\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

$$=\boldsymbol{\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C$$ [F]

[F]　$\sin x\neq 0$ より，
$1+\cos x>0$，$1-\cos x>0$ なので，
絶対値記号をはずして表す。

# 第16講 PART4 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：④，イ：④

**[解説]**

$$\int (x+1)\sin x\,dx$$

$$=\int (x+1)(-\cos x)'dx$$

$$=(x+1)(-\cos x)-\int (x+1)'\cdot(-\cos x)dx \quad \text{[A]}$$

$$=-(x+1)\cos x+\int \cos x\,dx$$

$$=-(x+1)\cos x+\sin x+C$$

[A]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$

$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x+1$，

$g'(x)=\sin x$ とおく。

**2** **[正解]** ウ：②，エ：③

**[解説]**

$$\int x^2 e^x dx=\int x^2(e^x)'dx$$

$$=x^2e^x-\int (x^2)'e^x dx \quad \text{[B]}$$

$$=x^2e^x-\int 2xe^x dx$$

$$=x^2e^x-2\int x(e^x)'dx \quad \text{[C]}$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

$$=(x^2-2x+2)e^x+C$$

[B]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$

$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x^2$，

$g'(x)=e^x$ とおく。

[C]　もう一度，部分積分法を用いる。

## 3

**[正解]** オ：④，カ：④

**[解説]**

$$\int x^2\log x dx=\int\left(\boldsymbol{\frac{x^3}{3}}\right)'\cdot\boldsymbol{\log x dx}$$ [D]

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot(\log x)'dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^2}{3}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C}$$

[D]　部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx$$
$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ だから，

$f(x)=\log x$，$g'(x)=x^2$ とする。

# 第17講　PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** アイ：11，ウ：5

**[解説]**

$$\int_1^2 (3x-5)^4\,dx = \left[\frac{1}{15}(3x-5)^5\right]_1^2 \quad \text{[A]}$$

$$= \frac{1}{15}\{1^5-(-2)^5\}$$

$$= \frac{33}{15} = \mathbf{\frac{11}{5}}$$

[A]　定積分
　$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

## 2

**[正解]** エ：4，オ：3

**[解説]**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx \quad \text{[B]}$$

$$= [\log(x+1)-\log(x+2)]_0^1 \quad \text{[C]}$$

$$= \left[\log\frac{x+1}{x+2}\right]_0^1$$

$$= \log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}$$

$$= \mathbf{\log\frac{4}{3}}$$

[B]　部分分数に分解する。

[C]　$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|+C$

**3** **[正解]** カ：③

**[解説]**

$$\int_1^2 e^{-t}dt - \int_1^0 e^{-t}dt = \int_1^2 e^{-t}dt + \int_0^1 e^{-t}dt \quad \text{[D]}$$

$$= \int_0^2 e^{-t}dt \quad \text{[D]}$$

$$= \left[-e^{-t}\right]_0^2$$

$$= -e^{-2} - (-1)$$

$$= \mathbf{1 - \frac{1}{e^2}}$$

[D] $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

$\displaystyle= \int_a^c f(x)dx$

**4** **[正解]** キ：②

**[解説]**

$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx \quad \text{[E]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

[E] $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\Longleftrightarrow \quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

**5** **[正解]** ク：4，ケ：3

**[解説]**

$$\int_0^\pi \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin 3x + \sin x)dx \quad \text{[F]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$= \mathbf{\frac{4}{3}}$$

[F] 積→和の公式

$\sin\alpha\cos\beta$

$= \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

**6** **[正解]コ：④**

**[解説]**

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ のとき，$|\sin x| = -\sin x$ [G]

[G]　場合分けをして，絶対値記号をはずす。

よって，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x) dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$= \mathbf{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

# 第 17 講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：2，イ：③，ウ：8，エ：3

**[解説]**

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，

$$x=t^2-1$$

$$dx=2tdt$$

| $x$ | $0$ | $\to$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $\to$ | $2$ |

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt$$ [A]

$$=\int_1^2 (2t^2-2)dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3-2t\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(8-1)-2(2-1)$$

$$=\frac{14}{3}-2$$

$$=\frac{8}{3}$$

[A]　定積分の置換積分法①

$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

| $x$ | $a$ | $\to$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | $\to$ | $\beta$ |

## 2

**[正解]** オ：①，カ：1，キ：5

**[解説]**

$\cos x = t$ とおくと，

$-\sin x dx = dt$

| $x$ | $0$ | $\to$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $\to$ | $0$ |

[B]

[B]　$t$ の積分区間を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^4 x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot (-\sin x) dx$$

[C]

[C]　定積分の置換積分法②

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

ただし，$g(x)=t$，$g(a)=\alpha$，$g(b)=\beta$

$$= -\int_1^0 t^4 dt$$

$$= \boldsymbol{\int_0^1 t^4 dt}$$

$$= \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

## 3

**[正解]** ク：①，ケ：1，コ：2

**[解説]**

$\log x = t$ とおくと，

$\dfrac{dx}{x} = dt$

| $x$ | $1$ | $\to$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\to$ | $1$ |

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_1^e \log x \cdot \frac{dx}{x}$$ [D]

[D]　$\dfrac{\log x}{x} = \log x \cdot (\log x)'$

と表すことができ，$f(g(x))g'(x)$ の形で表される。

$$= \boldsymbol{\int_0^1 t dt}$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

# 第17講 PART3 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：③，イ：④，ウ：②

**[解説]**

$x=2\sin\theta$ とおくと，[A]

$dx=2\cos\theta d\theta$

| $x$ | $0$ | $\to$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $0$ | $\to$ | $\frac{\pi}{2}$ |

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，

$\cos\theta\geqq 0$ であるから，

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\theta}$$
$$=2\cos\theta$$

よって，

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{4\cos^2\theta d\theta}$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \quad \text{[B]}$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

[A] $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分では，
$x=a\sin\theta$ とおき，
$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。

[B] $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
$\iff \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

## 2 [正解] エ：②，オ：②，カキ：12

**[解説]**

$x=2\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$dx=2\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ [C]

| $x$ | $\sqrt{2}$ | → | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $\frac{\pi}{6}$ | → | $\frac{\pi}{4}$ |

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，

$\cos\theta>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{8-x^2}&=\sqrt{8-(2\sqrt{2}\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{8(1-\sin^2\theta)}\\&=\sqrt{8\cos^2\theta}\\&=2\sqrt{2}\cos\theta\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{2\sqrt{2}\cos\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

[C]　$\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分では，
$x=a\sin\theta$ とおき，
$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ を利用する。

**3**　**[正解]** ク：③，ケ：①，コ：3

**[解説]**

$\boldsymbol{x=\tan\theta}$ とおくと，

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$ [D]

| $x$ | $0$ | $\to$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $0$ | $\to$ | $\frac{\pi}{3}$ |

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

[D]　$\frac{1}{x^2+a^2}$ の定積分では，
$x=a\tan\theta$ とおき，
$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

# 第17講　PART4 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：②，イ：①

**[解説]**

$f(x)=x^3(3x^2-4)$ とおくと，

$$f(-x)=-x^3(3x^2-4)=-f(x)\ \text{[A]}$$

より，$f(x)$ は**奇関数**である。

$$\int_{-2}^{2}x^3(3x^2-4)dx=\mathbf{0}\ \text{[B]}$$

[A]　$f(-x)=-f(x)$
$\Longleftrightarrow$　$f(x)$ は奇関数

[B]　$f(x)$ が奇関数のとき，
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

**2**

**[正解]** ウ：②，エ：①

**[解説]**

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ とおくと，

$$f(-x)=-x\sqrt{1-x^2}=-f(x)\ \text{[C]}$$

より，$f(x)$ は**奇関数**である。

$$\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=\mathbf{0}\ \text{[D]}$$

[C]　$f(-x)=-f(x)$
$\Longleftrightarrow$　$f(x)$ は奇関数

[D]　$f(x)$ が奇関数のとき，
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

**3** **[正解]** オ：①，カ：②，キ：③

**[解説]**

$f(x)=\cos^2 x$ とおくと，

$$f(-x)=\cos^2(-x)=\cos^2 x=f(x) \quad \text{[E]}$$

より，$f(x)$ は**偶関数**である。

よって，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x dx=\boldsymbol{2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x dx} \quad \text{[F]}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

[E]　$f(-x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow$　$f(x)$ は偶関数

[F]　$f(x)$ が偶関数のとき，
$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$

# 第17講　PART5 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：④，イ：④，ウ：③

**[解説]**

$$\int_1^2 (x-1)(x-2)^2\,dx$$

$$=\int_1^2 (x-1)\cdot\left\{\frac{(x-2)^3}{3}\right\}'dx \quad \text{[A]}$$

$$=\left[(x-1)\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2-\int_1^2\frac{(x-2)^3}{3}dx$$

$$=0-\int_1^2\frac{(x-2)^3}{3}dx$$

$$=\left[-\frac{(x-2)^4}{12}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{12}$$

[A]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x-1$，

$g'(x)=(x-2)^2$ とする。

**2**　**[正解]** エ：④，オ：②，カ：④

**[解説]**

$$\int_1^2 x^3\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\cdot\log x\,dx \quad \text{[B]}$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\cdot\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\cdot\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^3}{4}dx$$

$$=4\log 2-\left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2$$

$$=4\log 2-\frac{16-1}{16}$$

$$=4\log 2-\frac{15}{16}$$

[B]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=\log x$，

$g'(x)=x^3$ とする。

## 3

**[正解]** キ：①，ク：③，ケ：④

**[解説]**

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \int_0^{\pi} x^2 (\sin x)' dx$$

$$= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx \quad \text{[C]}$$

$$= -\int_0^{\pi} 2x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2x (\cos x)' dx \quad \text{[D]}$$

$$= [2x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \cos x dx$$

$$= -2\pi - [2 \sin x]_0^{\pi}$$

$$= -2\pi$$

[C]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

ここでは，$f(x)=x^2$，$g'(x)=\cos x$ とする。

[D]　さらに部分積分法を使う。

# 第 18 講　PART1 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：②

**[解説]**

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (t+1)e^t\,dt = (x+1)e^x$$ [A]

[A]　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

（$a$ は定数）

## 2

**[正解]** イ：③

**[解説]**

$\sin^2 t$ の不定積分の 1 つを $F(t)$ とすると，

$$F'(t) = \sin^2 t$$

$$\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = \Big[F(t)\Big]_0^{2x} = F(2x) - F(0)$$

よって，

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \sin^2 t\,dt = F'(2x)\cdot(2x)' - \{F(0)\}'$$ [B]

$$= 2F'(2x)$$

$$= 2\sin^2 2x$$

[B]　積分区間の上端が $x$ ではなく $2x$ であることに注意する。

## 3 [正解] ウ：④

**[解説]**

$$\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$$

$$= x\int_0^x \cos 2t\,dt - \int_0^x t\cos 2t\,dt$$ [C]

よって，

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\cos 2t\,dt$$

$$= 1\cdot\int_0^x \cos 2t\,dt + x\cos 2x - x\cos 2x$$ [D]

$$= \int_0^x \cos 2t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^x$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

[C]　$x$ を定数とみて，定積分の外に出す。

[D]　$x\int_0^x \cos 2t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$(x)'\cdot\int_0^x \cos 2t\,dt + x\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x \cos 2t\,dt$$

$\int_0^x t\cos 2t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos 2t\,dt = x\cos 2x$$

# 第18講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：②

**[解説]**

$\int_0^1 f(t)dt=k$ とおくと，[A]

$$f(x)=2+\cos\pi x-k$$

よって，

$$k=\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\int_0^1 (2+\cos\pi t-k)dt$$

$$=\left[(2-k)t+\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1$$

$$=2-k$$

よって，$k=2-k$

$$k=1$$

したがって，

$$\boldsymbol{f(x)=1+\cos\pi x}$$

[A]　$\int_0^1 f(t)dt$ は定数だから，1つの文字でおく。

## 2 [正解] イ：④，ウ：1，エ：③

**[解説]**

$$f(x)=x^2+\int_1^x (x-t)e^t\,dt \quad \cdots\cdots①$$

より，

$$f(x)=x^2+x\int_1^x e^t\,dt-\int_1^x te^t\,dt$$ [B]

$$f'(x)=2x+1\cdot\int_1^x e^t\,dt+x\cdot e^x-xe^x$$ [C]

$$=2x+\int_1^x e^t\,dt$$

$$=2x+\left[e^t\right]_1^x$$

$$=\boldsymbol{2x+e^x-e}$$

よって，

$$f(x)=\int(2x+e^x-e)\,dx$$

$$=x^2+e^x-ex+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$=x^2-ex+e^x+C \quad \cdots\cdots②$$

①で $x=1$ のとき，$f(1)=\mathbf{1}$ [D]

よって，②より，

$$1+C=1$$

$$C=0$$

したがって，

$$\boldsymbol{f(x)=x^2-ex+e^x}$$

[B]　定積分の中の $x$ は定数とみなして定積分の外に出す。

[C]　$x\int_1^x e^t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$(x)'\cdot\int_1^x e^t\,dt+x\cdot\frac{d}{dx}\int_1^x e^t\,dt$$

$\int_1^x te^t\,dt$ を $x$ で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\int_1^x te^t\,dt=xe^x$$

[D]　$\int_1^1 (x-t)e^t\,dt=0$

# 第19講　PART1 確認問題 解答

**1**　[正解] ア：③，イ：③

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$$ [A]

$$=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

[A]　区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

**2**　[正解] ウ：①，エ：②

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$ [B]

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}$$

[B]　まずは，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形で表す。
この場合，$f(x)=\sqrt{x}$ である。

**3** **[正解]** オ：③，カ：②

**[解説]**

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+n}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2 \quad \text{[C]}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)^2dx$$

$$=\int_0^1(1+x)^{-2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

[C]　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形で表す。

# 第 19 講　PART2 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：④，イ：③，ウ：①，エ：⑥，
オ：②，カ：①

**[解説]**

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x^2 \leqq x$

よって，$1 \leqq \boldsymbol{1+x^2} \leqq 1+x$ [A]

各辺は正であるから，

$$\frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq 1 \quad \text{[B]}$$

この不等式の等号は常には成り立たないから，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 dx \quad \text{[C]}$$

が成り立つ。

ここで，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{(1+x)'}{1+x}dx$$

$$= [\log|1+x|]_0^1$$

$$= \log 2$$

$$\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

であるから，

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 1$$

[A]　各辺に 1 を加える。

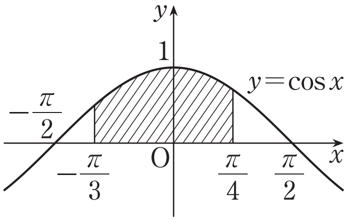
[B]　逆数の不等式にする。

[C]　定積分と不等式
区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，常に $f(x) \geqq g(x)$ ならば，
$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$
（等号成立は，常に $f(x)=g(x)$ のとき）

# 第20講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：③

**[解説]**




$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において，$y \geqq 0$ であるから，

求める面積は，

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{[A]}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

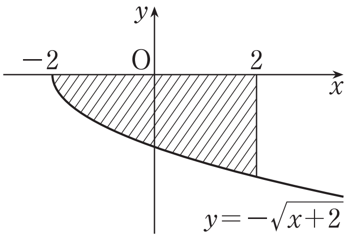
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

[A]　曲線と $x$ 軸の間の面積
$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，
区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

**2**　**[正解]** イウ：16，エ：3

**[解説]**




$-2 \leqq x \leqq 2$ において，$y \leqq 0$ であるから，

求める面積は，

$$-\int_{-2}^{2}(-\sqrt{x+2})dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{x+2}\,dx$$ [B]

$$=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}$$

$$=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

[B]　曲線と $x$ 軸の間の面積
$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，

$$S=-\int_{a}^{b}f(x)dx$$

**3**　**[正解]** オ：④

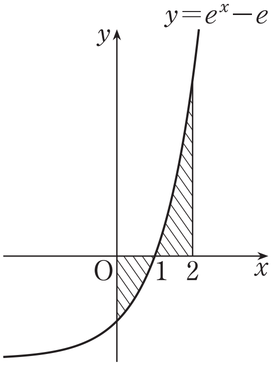
**[解説]**

曲線 $y=e^x-e$ と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標は,

$$e^x-e=0$$

$$e^x=e$$

よって, $x=1$




$0\leqq x\leqq 1$ において, $y\leqq 0$

$1\leqq x\leqq 2$ において, $y\geqq 0$

であるから, 求める面積は,

$$-\int_0^1(e^x-e)dx+\int_1^2(e^x-e)dx \quad \text{[C]}$$

$$=-\Big[e^x-ex\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$

$$=-\{(e-e)-1\}+\big\{(e^2-2e)-(e-e)\big\}$$

$$=\boldsymbol{e^2-2e+1}$$

[C]　[0, 1], [1, 2] の区間に分けて, 面積を求める。

# 第20講　PART2 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：8，イ：6，ウ：3

**[解説]**

$y=\dfrac{6}{x}$ より，$xy=6$　……①

$2x+y=8$ より，$y=-2x+8$　……②

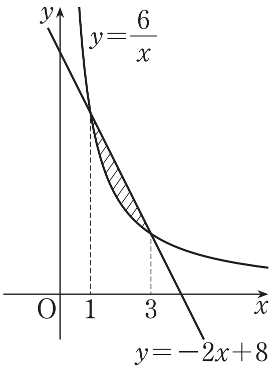
①，②より，$x(-2x+8)=6$ [A]

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

よって，曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ の共有点の $x$ 座標は，$x=1$，$3$

[A]　曲線 $y=\dfrac{6}{x}$ と直線 $2x+y=8$ の共有点の $x$ 座標を求める。




$1\leqq x\leqq 3$ においては，$-2x+8\geqq\dfrac{6}{x}$

よって，求める面積は，

$$\int_1^3\left\{(-2x+8)-\frac{6}{x}\right\}dx \quad \text{[B]}$$

$$=\Big[-x^2+8x-6\log|x|\Big]_1^3$$

$$=(-9+24-6\log 3)-(-1+8)$$

$$=\mathbf{8-6\log 3}$$

[B]　2 曲線の間の面積
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

## 2

**[正解]** エ：②

**[解説]**

$\sin x = -\cos x$ を解くと，

$$\sin x + \cos x = 0$$ [C]

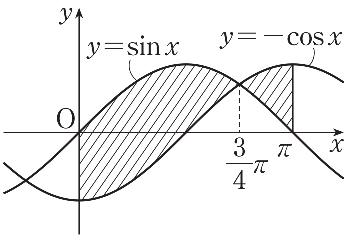
$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

[C]　2 曲線の共有点の $x$ 座標を求める。

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$

よって，$x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$ より，$x=\dfrac{3}{4}\pi$

したがって，$y=\sin x$，$y=-\cos x$ のグラフは，次の図のようになる。




$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ においては，$\sin x \geqq -\cos x$

$\dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi$ においては，$-\cos x \geqq \sin x$

よって，求める面積は，

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\{\sin x-(-\cos x)\}dx$$

$$+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(-\cos x-\sin x)dx$$ [D]

[D]　$\left[0,\ \dfrac{3}{4}\pi\right]$ と $\left[\dfrac{3}{4}\pi,\ \pi\right]$ の区間に分けて，定積分の式をつくる。

$$=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx$$

[E]

$$=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\left[-\cos x+\sin x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1)-\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}$$

[E]　2 曲線の間の面積
区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

# 第20講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：④

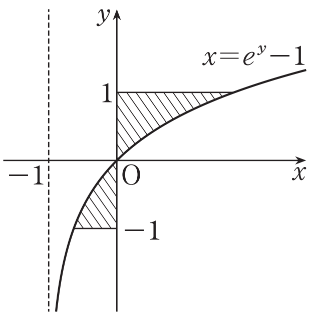
**[解説]**

曲線 $y=\log(x+1)$ と $y$ 軸との共有点の $y$ 座標は，$x=0$ より，

$$y=\log 1=0$$

$y=\log(x+1)$ より，$x+1=e^y$

$$x=e^y-1$$




$-1\leqq y\leqq 0$ においては，$e^y-1\leqq 0$

$0\leqq y\leqq 1$ においては，$e^y-1\geqq 0$

よって，求める面積は，

$$-\int_{-1}^{0}(e^y-1)dy+\int_{0}^{1}(e^y-1)dy \quad \text{[A]}$$

$$=-\left[e^y-y\right]_{-1}^{0}+\left[e^y-y\right]_{0}^{1}$$

$$=-\{1-(e^{-1}+1)\}+(e-1)-1$$

$$=\boldsymbol{e+\frac{1}{e}-2}$$

[A]　曲線と $y$ 軸の間の面積
$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，
区間 $c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\geqq 0$ のとき，$S=\int_{c}^{d}g(y)dy$
区間 $c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\leqq 0$ のとき，$S=-\int_{c}^{d}g(y)dy$

## 2

**[正解]** イ：1，ウ：6

**[解説]**

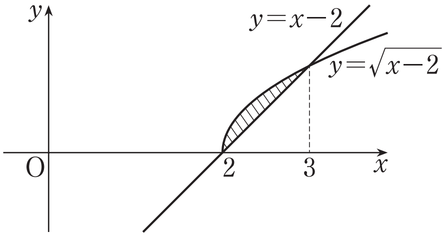
$\sqrt{x-2}=x-2$ より，

$$x-2=(x-2)^2$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=2,\ 3\quad（ともに\ x \geqq 2\ を満たす）$$

よって，曲線 $y=\sqrt{x-2}$ と直線 $y=x-2$ のグラフは次の図のようになる。




求める面積は，

$$\int_2^3\{\sqrt{x-2}-(x-2)\}dx \quad \text{[B]}$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_2^3$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[B]　$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

（別解）

$$y=\sqrt{x-2} \iff x-2=y^2\quad (y \geqq 0)$$

$$\iff x=y^2+2\quad (y \geqq 0)$$

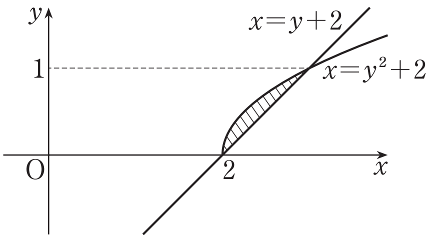
$$y=x-2 \iff x=y+2$$

$y^2+2=y+2$ より，$y^2-y=0$

$$y(y-1)=0$$

$$y=0,\ 1$$

よって，曲線 $x=y^2+2\,(y \geqq 0)$，$x=y+2$ のグラフは，次の図のようになる。




求める面積は,

$$\int_0^1 \{(y+2)-(y^2+2)\}dy$$ [C]

$$=\int_0^1 (y-y^2)dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[C]　区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $f(y) \geqq g(y)$ のとき，2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ と 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 $S$ は，

$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}dy$$

# 第 20 講　PART4 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：2，イ：3，ウ：9，エ：④，オ：6

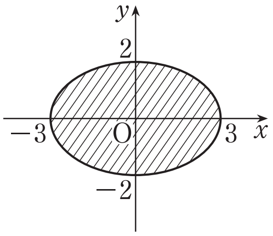
**[解説]**

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を $y$ について解くと，

$$y^2=4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$$

$$=\frac{4}{9}(9-x^2)$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}$$




$f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ とおくと，

$y=f(x)$ は楕円の上半分を，$y=-f(x)$ は楕円の下半分を表している。

よって，求める面積 $S$ は，

$$S=2\int_{-3}^{3}\boldsymbol{f(x)dx}$$ [A]

$$=\frac{4}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

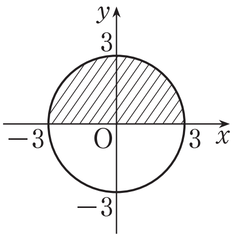
[A]　楕円の上半分の面積の 2 倍である。

ここで，

$$y=\sqrt{9-x^2}$$

$$\iff\quad x^2+y^2=9$$

$$(y\geqq 0)$$




であるから，$y=\sqrt{9-x^2}$ のグラフは，原点中心，半径 3 の円の上半分である。よって，$\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ は，半径 3 の半円の面積を表す。[B]

[B]　$\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ の値は，半円の面積に等しくなるので，このことを利用すると，積分計算をせずに求められる。

したがって，

$$S=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot3^2=\boldsymbol{6\pi}$$

## 2

**[正解]** カ：1，キ：②，ク：2，ケ：3

**[解説]**

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$

よって，$y \geqq 0$

$y=0$ より，$2\theta=0$，$\pi$

$$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$$

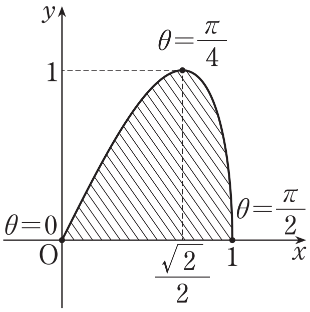
したがって, 曲線と $x$ 軸との共有点の $x$ 座標は,

$$x=0,\ \mathbf{1}$$

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ より，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，

$$\frac{dx}{d\theta} \geqq 0 \quad (\text{等号成立は } \theta=\frac{\pi}{2} \text{ のとき})$$

よって，求める面積は，次の図の斜線部分の面積である。




$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ より，$dx=\cos\theta d\theta$

$x$ と $\theta$ の対応は右の通り。

| $x$ | $0$ | $\to$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $0$ | $\to$ | $\frac{\pi}{2}$ |

よって，置換積分法より，

$$S=\int_0^1 y dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{\sin 2\theta \cos\theta d\theta} \quad \text{[C]}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(-\cos\theta)' d\theta$$

[C]　$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$S=\int_a^b y dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$$

| $x$ | $a$ | $\to$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | $\to$ | $\beta$ |

$$=-2\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2\left(0-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

# 第21講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：9，イウ：25，エ：5，オカ：15

**[解説]**

断面の円と底面の円は相似であり，相似比は $x:5$ であるから，

$$S(x):S(5)=x^2:5^2$$

$S(5)=\pi\cdot3^2=9\pi$ であるから，

$$\boldsymbol{S(x)=\frac{9}{25}\pi x^2}$$

よって，

$$V=\int_0^5 S(x)dx \quad \text{[A]}$$

$$=\int_0^5 \frac{9}{25}\pi x^2\,dx$$

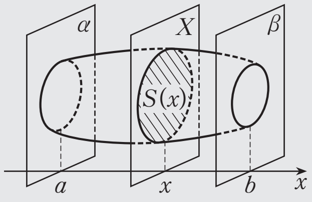
$$=\left[\frac{3}{25}\pi x^3\right]_0^5$$

$$=\frac{3}{25}\pi\cdot5^3=\boldsymbol{15\pi}$$

[A]　定積分と体積

$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $a$，$b$ で交わる平面をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とし，$x$ 軸に垂直で $x$ 軸と座標 $x$ で交わる平面 $X$ である立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とするとき，2 平面 $\alpha$，$\beta$ に挟まれた部分の体積 $V$ は，

$$V=\int_a^b S(x)dx\ (a<b)$$



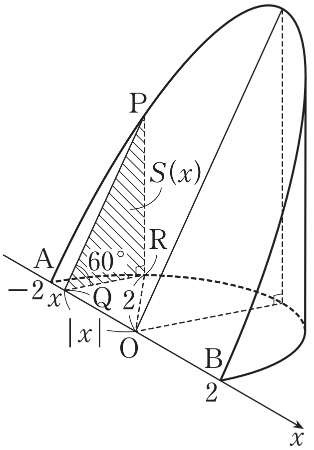
# 第21講 PART2 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：4，エ：2，

オカ：16，キ：3，ク：3

**[解説]**

断面は，次の図のような直角三角形である。




ここで，$QR=\sqrt{4-x^2}$

$PR=\sqrt{3}\,QR=\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}$

であるから，

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot QR\cdot PR \quad \text{[A]}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)}$$

よって，求める体積 $V$ は，

$$V=\int_{-2}^{2}S(x)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx \quad \text{[C]}$$

$$=\sqrt{3}\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$$

[A]　まずは，断面積 $S(x)$ を求める。

[B]　底面の半径が 2 より，
$-2\leqq x\leqq 2$
$S(x)$ を $-2$ から 2 まで積分する。

[C]　$f(x)$ が偶関数のとき，
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$$=\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\sqrt{3}\left(8-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{3}}$$

# 第21講 PART3 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：2，イ：6，ウ：1

**[解説]**

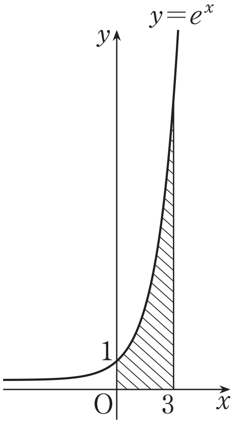
求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^3 (e^x)^2\,dx \quad \text{[A]}$$

$$=\pi\int_0^3 e^{2x}\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^6-1)}$$




[A]　$x$ 軸の周りの回転体の体積
曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ で囲まれた部分を，$x$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V$ は，

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

## 2

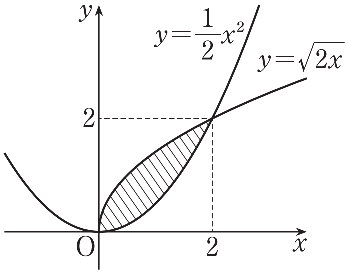
**[正解]** エオ：12，カ：5

**[解説]**

$\dfrac{1}{2}x^2=\sqrt{2x}$ より，$\dfrac{1}{4}x^4=2x$

$x(x^3-8)=0$

$x=0,\ 2$




[B]

$0\leqq x\leqq 2$ においては，

$\sqrt{2x}\geqq\dfrac{1}{2}x^2\geqq 0$

求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^2(\sqrt{2x})^2\,dx-\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2dx$$ [C]

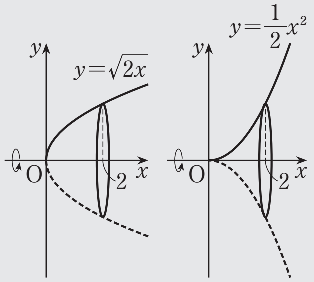
$$=\pi\int_0^2\left(2x-\frac{1}{4}x^4\right)dx$$

$$=\pi\left[x^2-\frac{1}{20}x^5\right]_0^2$$

$$=\pi\left(4-\frac{8}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{12}{5}\pi}$$

[B]




2つの回転体の体積の差を求める。

[C]　2曲線 $f(x)$，$g(x)$ に囲まれた図形を $x$ 軸の周りに1回転してできる立体の点 $(x,\ 0)$ を通り，$x$ 軸に垂直な平面による断面積 $S(x)$ は，

$S(x)=\pi\{f(x)\}^2-\pi\{g(x)\}^2$

ただし，$f(x)\geqq g(x)\geqq 0$

# 第21講 PART4 確認問題 解答

**1**

**[正解]** アイ：18

**[解説]**

$y=x^2-2$ より，

$$x^2=y+2$$

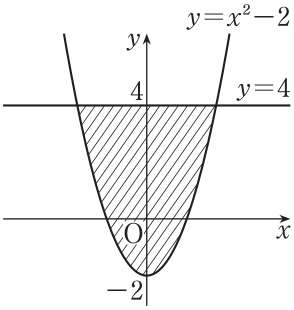
求める立体の体積は，

$$\pi\int_{-2}^{4}(y+2)\,dy$$

[A]

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{4}$$

$$=\mathbf{18\pi}$$




[A] $y$ 軸の周りの回転体の体積
曲線 $x=g(y)$ と $y$ 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ $(c<d)$ で囲まれた部分を，$y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V$ は，

$$V=\pi\int_{c}^{d}\{g(y)\}^2\,dy$$

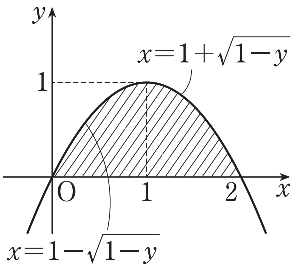
## 2

**[正解]** ウ：8，エ：3

**[解説]**

$$y=-x^2+2x$$
$$=-(x-1)^2+1$$
$$(x-1)^2=1-y$$
$$x=1\pm\sqrt{1-y}$$ [B]

[B]　まずは，$x$ について解き，“ $x=$ ” で表す。




$0\leqq y\leqq 1$ において，

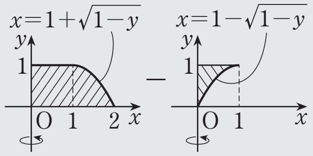
$$1+\sqrt{1-y}\geqq 1-\sqrt{1-y}\geqq 0$$

よって，求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^1(1+\sqrt{1-y})^2\,dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2\,dy$$

[C]

[C]




2 つの回転体の体積の差を求める。

$$=\pi\int_0^1\{(1+\sqrt{1-y})^2-(1-\sqrt{1-y})^2\}\,dy$$
$$=\pi\int_0^1\{(1+2\sqrt{1-y}+1-y)-(1-2\sqrt{1-y}+1-y)\}\,dy$$
$$=4\pi\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy$$
$$=4\pi\left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$$

# 第22講　PART1 確認問題 解答

**1**　**[正解]** ア：③，イ：8

**[解説]**

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin t$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2\\&=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\\&=2(1-\cos t)\\&=4\cdot\frac{1-\cos t}{2}\quad\text{[A]}\\&=4\sin^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$

[A]　2倍角の公式

$$\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2}$$

$0\leqq\frac{t}{2}\leqq\pi$ より，$\sin\frac{t}{2}\geqq0$

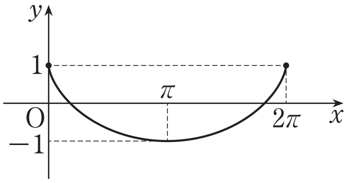
よって，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\quad\text{[B]}\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt\\&=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\\&=-4(-1-1)\\&=8\end{aligned}$$

[B]　媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さを $L$ とすると，

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$



## 2 [正解] ウ：④，エオ：14，カキ：27

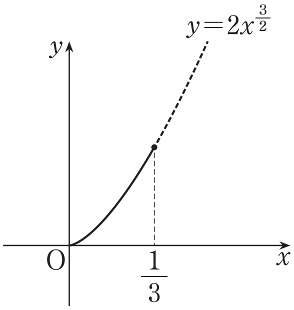
**[解説]**

$\dfrac{dy}{dx}=3x^{\frac{1}{2}}$ より，

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$=1+9x$$

よって，

$$L=\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+9x}\,dx \quad \text{[C]}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}(9x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}(9x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{2}{27}(8-1)$$
$$=\mathbf{\frac{14}{27}}$$




[C]　曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さを $L$ とすると，

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

# 第22講　PART2 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：0，イ：4

**[解説]**

点Pの位置の変化量は，

$$s=\int_0^{2\pi}\sin t\,dt$$ [A]

$$=\left[-\cos t\right]_0^{2\pi}$$

$$=-1-(-1)$$

$$=\mathbf{0}$$

[A]　数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とする。
$t=a$ から $t=b$ までの点Pの位置の変化量 $s$ は，

$$s=\int_a^b v\,dt$$

$0\leqq t\leqq \pi$ のとき，$\sin t\geqq 0$

$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，$\sin t\leqq 0$

よって，点Pの運動する道のりは，

$$l=\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt$$ [B]

$$=\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt$$

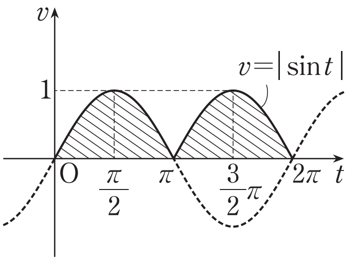
$$=\left[-\cos t\right]_0^{\pi}+\left[\cos t\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=1-(-1)+1-(-1)$$

$$=\mathbf{4}$$

[B]　数直線上を運動する点Pの時刻 $t$ における速度を $v$ とする。
$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は，

$$l=\int_a^b |v|\,dt$$



## 2

**[正解]** ウ：④，エ：5，オ：5，カ：8

**[解説]**

$\dfrac{dx}{dt}=3t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=6t$ より，

$$l=\int_0^1\sqrt{(3t^2)^2+(6t)^2}\,dt$$ [C]

$$=\int_0^1\sqrt{9t^4+36t^2}\,dt$$

$$=\boldsymbol{\int_0^1 3t\sqrt{t^2+4}\,dt}$$

$t^2+4=u$ とおくと，

$$2tdt=du$$

| $t$ | 0 | → | 1 |
|---|---|---|---|
| $u$ | 4 | → | 5 |

よって，

$$l=\int_0^1\frac{3}{2}\sqrt{t^2+4}\cdot 2tdt$$

$$=\int_4^5\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$=\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5$$

$$=5^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}$$

$$=5\sqrt{5}-8$$

[C]　平面上を運動する点の道のり
座標平面上を運動する点Pの座標 $(x, y)$ が，時刻 $t$ の関数として
$x=f(t)$，$y=g(t)$
と表されるとき，$t=a$ から $t=b$ までの点Pの動く道のり $l$ は，

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_a^b|\vec{v}|dt$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。